وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الجنوبية
المعهد التكنولوجي في البصرة
قسم التقنيات الكهربائية

الحقيبة التعليمية

رياضيات ٢

لطلاب المرحلة الاولى

اعداد

م.م ميادة مارد عبد الحسين
مدرس مساعد
قسم التقنيات الكهربائية
2025

وصف المقرر

1- اسم المقرر:
رياضيات ٢
2- رمز المقرر:
3- الفصل / السنة:
فصلي
4- تاريخ إعداد هذا الوصف :
28/ 02/ 2025
5- أشكال الحضور المتاحة :
حضوري فقط
6- عدد الساعات الدراسية (الكلي)/ عدد الوحدات (الكلي):
30 ساعة فصليا /2ساعة اسبوعياً/ ٢وحدات
7- اسم مسؤول المقرر الدراسي (اذا اكثر من اسم يذكر)
الاسم: م.م ميادة مارد عبدالحسين الآيميل : mayada.marid@stu.edu.iq
8- اهداف المقرر

١ .تزويد الطلبة بالأساسيات الرياضية الضرورية لدراستهم في المجالات التقنية والهندسية. ٢ .تنمية القدرة على التفكير المنطقي والتحليل الرياضي في حل المشكلات. ٣ .فهم مفاهيم المصفوفات، المعادلات، الدوال، النهايات، والمشتقات. ٤ .ربط المفاهيم الرياضية بالتطبيقات العملية في مجال الكهرباء والإلكترونيك. ٥. تطوير المهارات في تمثيل البيانات والمعادلات بيانياً وتفسير النتائج.	• ..... • ..... • .....

9- استراتيجيات التعليم والتعلم	
الاستراتيجية	1 .أسلوب التخطيط التعاوني للمفاهيم.

2 .استراتيجية العصف الذهني. 3. أسلوب تدوين الملاحظات وفق تسلسل المحتوى 4. التعلم النشط من خلال حل التمارين والمسائل.	

10- بنية المقرر

الأسبوع	الساعات	مخرجات التعلم المطلوبة	اسم الوحدة او الموضوع	طريقة التعلم	طريقة التقييم
1-2	2 ساعة	ان يفهم الطالب ١- التكامل غير المحدد وقواعده ٢- التكامل المحدد وتطبيقاته ٣- الأعداد المركبة (التمثيل الجبري) ٤- الصورة القطبية والتمثيل البياني للأعداد المركبة ٥- ضرب وقسمة الأعداد المركبة والتحويل بين الصور ٦- الجذور والأسس في الأعداد المركبة (صيغة دي موافر) ٧- مراجعة واختبار نهائي	الرياضيات 2	١. المحاضرات النظرية ٢.محاضرات المناقشة العلمية المباشرة والمفتوحة مع الطلبة ٣-ربط الأفكار السابقة مع المعلومات الجديدة	الامتحانات الأسبوعية والشهرية واليومية والتحريرية وامتحان نهاية الفصل.
3	2 ساعة				
4	2 ساعة				
5	2 ساعة				
6	2 ساعة				
7	2 ساعة				
8	2 ساعة				
9	2 ساعة				
10	2 ساعة				
11	2 ساعة				
12	2 ساعة				
13	2 ساعة				
15-14	2 ساعة				

11- تقييم المقرر

توزيع كالتالي: 30 درجة امتحانات نظرية لمنتصف الفصل الاول. ١٠درجات امتحانات يومية وتقييم مستمر. 60 درجة امتحان نهاية الفصل

12- مصادر التعلم والتدريس

الكتب المقررة المطلوبة (المنهجية أن وجدت)	مكتبة المعهد للحصول على المصادر الاضافية للمناهج.
المراجع الرئيسة (المصادر)	George B. Thomas,Jr., "Thomas calculus",12th edition,
الكتب والمراجع الساندة التي يوصى بها (المجلات العلمية،	جميع المجلات العلمية الرصينة التي لها علاقة بالمفهوم الواسع للرياضيات.

التقارير ....)	
المراجع الإلكترونية ، مواقع الانترنيت	المواقع على الانترنيت التي تخص الرياضيات والمثلثات والمصفوفات

وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
الجامعـة التقنيـة الجنوبيـة
المعهـد التكنولوجـي بصرة
قسـم التقنيـات الكهربائية

حقيبـــة تعليميـــة

فـــي

رياضيات ٢

لطلبـــة المرحلـــة الأولـــى

اعداد

م.م ميادة مارد عبد الحسين
مدرس مساعد
قسم التقنيات الكهربائية

2025

نظرة عامة2/

A / 2 الفئة المستهدفة:-

طلبــة المرحلــة الأولــى
المعهــد التقنــي في البصــرة
قســم التقنيــات الكهربائية

B/ 2 الدوافع -:

أن يتمكن الطالب من فهم مفهوم التكامل غير المحدد والمحدد واستخدامهما في حل المسائل الرياضية وتطبيقاتهما في المجالات الهندسية والفيزيائية.

C/ 1 الفكرة الرئيسة -:

تهيئة الطالب بالاسس الرياضية اللازمة لفهم وتحليل وتصميم الانظمة الكهربائية والالكترونية، من خلال ربط المفاهيم الرياضية بالتطبيقات الهندسية الواقعية.

D/ 1 الأهداف السلوكية

بعد دراسة الوحدة الاولى من الكورس الثاني، سيكون الطالب قادرًا على

١. ١ يعرّف التكامل غير المحدد ويذكر رموزه الأساسية.
٢. يجد التكامل غير المحدد لدوال جبرية بسيطة.
٣. يستخدم قواعد التكامل الأساسية في تبسيط وحل التكاملات.
٤. يفرق بين التكامل غير المحدد والتكامل المحدد.
٥. يحسب التكامل المحدد باستخدام نظرية القيمة الأساسية للتفاضل والتكامل.
٦. يحدد المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور السيني باستخدام التكامل المحدد.
٧. يطبّق التكامل المحدد في حساب المساحات بين منحنيين.
٨. يحل مسائل تطبيقية على التكامل في المجال الفيزيائي أو الهندسي مثل حساب (المسافة، العمل، الحجم ...إلخ)

- التكامل الغير محدد والمحدد

الاختبار القبلي

١. ما هو الاشتقاق العكسي؟

أ) التفاضل

ب) التكامل غير المحدد

ج) التكامل المحدد

د) الاشتقاق الثاني

٢. رمز التكامل غير المحدد هو:

$\int$ (أ

ب) d/dx

ج) $\int f(x)\,dx$

د) $\lim x \to a$

٣. التكامل المحدد يستخدم عادة لحساب:

أ) السرعة اللحظية

ب) الميل

ج) المساحة المحصورة تحت المنحنى

د) عدد النقاط الحرجة

٤. ناتج $\int x\,dx$ هو:

أ) x

ب) $x^2 + C$

ج) $x^2/2 + C$

د) $\ln(x) + C$

٥. إذا كان F(x) هو التكامل غير المحدد لـ f(x) ، فإن:

أ) $F'(x) = f(x)$

ب) $F(x) = f(x)$

ج) $f'(x) = 0$

د) $F''(x) = f(x)$

١. الدوال الأصلية والتكامل

تعريف ١ :

يقال إن $F(x)$ دالة أصلية (تكامل) لدالة $f(x)$ إذا تحققت العلاقة التالية :

$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ أي أن $dF(x) = f(x)dx$ بمعني أن تفاضل $F(x)$ هو $f(x)$

ومن التعريف السابق فإن الدالة $F(x)+c$ حيث c عدد ثابت اختياري، يمكن أن تكون دوال أصلية(تكامل) للدالة $f(x)$. والسبب يرجع لكون مشتقة العدد الثابت يساوي الصفر

نستنتج أنه إذا وجدت لدالة ما ، دالة أصلية ، فإنه يوجد عدد غير منته من الدوال الأصلية لها تختلف عن بعضها بالعدد الثابت ويكون لدينا التعريف التالي

تعريف ٢ :

تكامل دالة $f(x)$ هو دالة $F(x)+c$ ، حيث c عدد ثابت و :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

ويرمز لتكامل الدالة $f(x)$ بالرمز

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

ويقرأ بالتكامل غير المحدود لـ $f(x)dx$ ويسمى العدد الثابت c بثابت التكامل.

مثال ١ :

لدينا $d(x^5) = 5x^4dx$ إذن $\int 5x^4dx = x^5 + c$

و $d(e^{3x}) = 3e^{3x}dx$ إذن $\int 3e^{3x}dx = e^{3x} + c$

و $d(\cos x^2) = -2x\sin x^2dx$ إذن $\int -2x\sin x^2dx = \cos x^2 + c$

يعني أن التكامل هو العملية العكسية (للاشتقاق) للتفاضل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢. قوانين التكامل غير المحدود للدوال الجبرية

القاعدة١: تكامل العدد الثابت

ليكن a عدداً ثابتاً فإن

$\int adx = ax + c$ حيث c ثابت التكامل

مثال ٢:

$$1)\ \int 5dx = 5x + c$$

$$2)\ \int -7dx = -7x + c$$

$$3)\ \int -\frac{5}{3}dx = -\frac{5}{3}x + c$$

القاعدة٢:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ باستثناء $n = -1$ حيث c ثابت التكامل

مثال ٣:

$$1)\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$2)\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$3)\int x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c$$

القاعدة٣:

يمكن إخراج عامل ثابت من تحت إشارة التكامل أو بالعكس دون أن تتغير النتيجة أي أن:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

وذلك لأن اشتقاق الطرفين يعطي $af(x) = af(x)$

مثال ٤:

$$1)\int 7x^4 dx = 7\int x^4 dx = 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{7}{5}x^5 + c$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$2)\int\frac{-2}{x^3}dx=-2\int\frac{1}{x^3}dx=-2\int x^{-3}dx=-2\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+c=-2\frac{x^{-2}}{-2}+c=\frac{1}{x^2}+c$$

$$3)\int\sqrt{5}x^{-\frac{2}{3}}dx=\sqrt{5}\int x^{-\frac{2}{3}}dx=3\sqrt{5}x^{\frac{1}{3}}+c$$

القاعدة ٤:

تكامل المجموع الجبري لعدة دوال يساوي المجموع الجبري لتكاملا ت هذه الدوال أي أن :

إذا كانت $f(x),g(x)$ دوال قابلة للتكامل في x فإن

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

وبصفة عامة إذا كانت $f_1(x),f_2(x),f_3(x),\ldots,f_n(x)$ دوالاً قابلة للتكامل في x فإن:

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm f_3(x)\pm\ldots.\pm f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\pm\int f_3(x)dx\pm\ldots.\pm\int f_n(x)dx$$

مثال ٥: احسب التكاملات التالية:

$$1)\int(x^2-2x+5)dx,\qquad 2)\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx,\qquad 3)\int\left(x^5-\sqrt{2}x-\frac{3}{x^2}\right)dx.$$

الحل :

$$1)\int(x^2-2x+5)dx=\int x^2dx-\int 2xdx+\int 5dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+5x+c=\frac{1}{3}x^3-x^2+5x+c$$

$$2)\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx=\int\sqrt{x}dx-2\int\frac{1}{x^3}dx$$

$$=\int x^{\frac{1}{2}}dx-2\int x^{-3}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}-2\frac{x^{-3+1}}{-2}+c=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{-2}+c$$

$$3)\int\left(x^5-\sqrt{2}x-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int x^5dx-\sqrt{2}\int xdx-3\int x^{-2}dx$$

$$=\frac{1}{6}x^6-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+3x^{-1}+c$$

القاعدة ٥:

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x و n عدد يخالف -1 فتكون لدينا القاعدة التالية:

$\int u'u^n\,dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$ باستثناء $n=-1$ حيث c ثابت التكامل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٦ : احسب التكاملات التالية:

$$1)\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4\,dx, \qquad 2)\int x^3\left(x^4-2\right)^5\,dx, \qquad 3)\int \left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx$$

الحل:

$$1)\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4\,dx:$$

لدينا $u=2x^3-6 \Rightarrow u'=6x^2$ وبالتالي فإن:

$$\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4\,dx=\int u'u^4\,dx=\frac{u^5}{5}+c=\frac{\left(2x^3-6\right)^5}{5}+c$$

$$2)\int x^3\left(x^4-2\right)^5\,dx:$$

لدينا $u=x^4-2 \Rightarrow u'=4x^3$ ومنه فإن:

$$\int x^3\left(x^4-2\right)^5\,dx=\frac{1}{4}\int 4x^3\left(x^4-2\right)^5\,dx=\frac{1}{4}\frac{u^6}{6}+c=\frac{1}{24}\left(x^4-2\right)^6+c$$

$$3)\int \left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx=\int \left(x^2+1\right)\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

لدينا $u=x^3+3x+1 \Rightarrow u'=3x^2+3=3\left(x^2+1\right)$ وبالتالي فإن:

$$\int \left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx=\frac{1}{3}\int 3\left(x^2+1\right)\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int u'u^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

القاعدة ٦ : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي :

$$\int \frac{u'}{u}\,dx=\ln|u|+c$$

مثال ٧ : احسب التكامل التالي :

$$1)\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}\,dx, \qquad 2)\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}\,dx, \qquad 3)\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}\,dx, \qquad 4)\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx$$

الحل :

$$1)\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}\,dx:$$

لدينا $u=x^4+2x+1 \Rightarrow u'=4x^3+2=2(2x^3+1)$ وبالتالي فإن

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+1)}{x^4+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|x^4+2x+1| + c$$

$$2)\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx:$$

$$u = e^{2x^2}+5 \Rightarrow u' = 4xe^{2x^2}$$

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln|e^{2x^2}+5| + c$$

$$3)\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx:$$

$$u = 5-\tan x \Rightarrow u' = -\sec^2 x$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx = -\int \frac{-\sec^2 x}{5-\tan x}dx = -\int \frac{u'}{u}dx = -\ln|u| + c = -\ln|5-\tan x| + c$$

$$4)\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}dx:$$

$$u = x^2+\sin 2x \Rightarrow u' = 2x+2\cos 2x = 2(x+\cos 2x)$$

$$\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+\cos 2x)}{x^2+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+\sin 2x| + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

1) $\int (2\sqrt{x} - 3x^4)dx$

2) $\int \left(\frac{3}{x^4} - 4x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

3) $\int \sqrt{x}(x-3)^2 dx$

4) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)dx$

5) $\int 3(3x^2-1)^3 x dx$

6) $\int (x^4+2x)^2(4x^3+2)dx$

7) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

8) $\int 5(5x^7+2)^2 x^6 dx$

9) $\int \sqrt{1-4x}dx$

10) $\int \sqrt[3]{5+x^3}(x^2)dx$

11) $\int \frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}$

12) $\int (3x-x^3)^5(1-x^2)dx$

13) $\int \frac{t^3-4t+3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

14) $\int \frac{\sec x \tan x}{3+2\sec x}dx$

15) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣. قواعد تكامل الدوال المثلثية

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x بتطبيق القانون الأساسي لحساب التكامل للقوانين الأساسية للتفاضل يكون لدينا القوانين التالية:

1) $\int u' \cos u \, dx = \sin u + c$
2) $\int u' \sin u dx = -\cos u + c$
3) $\int u' \sec^2 u \, dx = \tan u + c$
4) $\int u' \csc^2 u \, dx = -\cot u + c$
5) $\int u' \sec u \tan u dx = \sec u + c$
6) $\int u' \csc u \cot u \, dx = -\csc u + c$
7) $\int u' \tan u dx = \ln|\sec u| + c$
8) $\int u' \cot u dx = -\ln|\csc u| + c$

مثال ٨: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \sin 4x dx,$ 2) $\int \cos 2x dx,$ 3) $\int x \tan(2x^2 + 1) dx,$ 4) $\int \cot\left(7 - \frac{x}{2}\right) dx.$

الحل:

1) $\int \sin 4x dx = \frac{1}{4}\int 4 \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x + c$
2) $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int 2 \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$
3) $\int x \tan(2x^2 + 1) dx = \frac{1}{4}\int 4x \tan(2x^2 + 1) dx = \frac{1}{4}\ln|\sec(2x^2 + 1)| + c$
4) $\int \cot\left(7 - \frac{x}{2}\right) dx = -2\int -\frac{1}{2}\cot\left(-\frac{x}{2}\right) dx = 2\ln\left|\csc\left(7 - \frac{x}{2}\right)\right| + c$

مثال ٩: احسب التكاملات التالية:

1) $\int [\sin(3x + 2) + \cos(2 - 3x)] dx,$ 2) $\int \sec^2(4x) dx$
3) $\int x^2 \csc^2\left(3 - \frac{x^3}{3}\right) dx,$ 4) $\int x^2 \csc(2x^3)\cot(2x^3) dx$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل:

1) $\int [\sin(3x+2)+\cos(2-3x)]dx = \int \sin(3x+2)dx + \int \cos(2-3x)dx.$

$$= \frac{1}{3}\int 3\sin(3x+2)dx - \frac{1}{3}\int -3\cos(2-3x)dx.$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+2) - \frac{1}{3}\sin(2-3x) + c.$$

2) $\int \sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\int 4\sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\tan 4x + c$

3) $\int x^2 \csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx = -\int -x^2 \csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx = \cot\left(3-\frac{x^3}{3}\right) + c$

4) $\int x^2 \csc 2x^3 \cot 2x^3 dx = \frac{1}{6}\int 6x^2 \csc 2x^3 \cot 2x^3 dx$

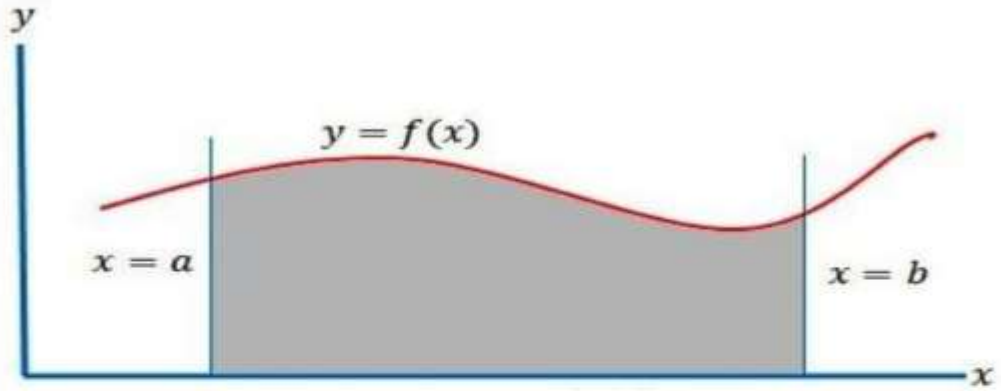
$$= \frac{1}{6}\left(-\csc 2x^3\right) + c = -\frac{1}{6}\csc 2x^3 + c$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التكامل المحدد *Definite integral*

لتكن الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فان التكامل المحدد يُعرّف بأنه $\int_a^b f(x)dx$ المساحة الواقعة تحت المنحني $f(x)$ وفوق المحور السيني والمحددة بالمستقيمين المتوازيين $x=a$ و $x=b$

كما موضح في الشكل أدناه :



وتحسب المساحة كالآتي

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث $F(x)$ هو تكامل الدالة $f(x)$.

بعض خواص التكامل المحدد

لتكن الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على فترة التكامل $a \le x \le b$ فان :

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad ; \quad c \in [a,b]$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (١) احسب التكاملات المحددة التالية :

1. $\int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx$

2. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

4. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$

الحل:

1. $$\int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x}\Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{53}{6}$$

2. $$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x}\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \;\Big|_0^{\pi}$$
$$= -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$$

3. $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{2}\Big|_{-1}^{1} = \sin^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} \frac{-1}{2} = \sin^{-1} \frac{1}{2} + \sin^{-1} \frac{1}{2}$$
$$= 2 \sin^{-1} \frac{1}{2} = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

4. $$\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int_1^3 \frac{dx}{4 + x^2 - 2x + 1} = \int_1^3 \frac{dx}{4 + (x - 1)^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x - 1}{2}\Big|_1^3$$
$$= \frac{1}{2} (\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تطبيقات على التكامل المحدد

هناك الكثير من التطبيقات على التكاملات المحددة كحساب المساحات المستوية وطول قوس الدالة و إيجاد حجوم الأجسام الدورانية وإيجاد المراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة وفي مسائل حركة الاجسام و إيجاد ضغط السائل وكذلك في حساب سرعة جزيئات الغاز والكثير من التطبيقات الاخرى وهنا سنتطرق الى المساحات المستوية وطول القوس .

أولاً : المساحة تحت المنحني

لحساب المساحات تحت المنحني يجب مراعاة الملاحظات التالية :

١. اذا كانت $f(x) \geq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[a,b]$ فان المساحة هي

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

٢. اذا كانت $f(x) \leq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[a,b]$ فان المساحة هي

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

٣. اذا وجد $c \in [a,b]$ بحيث ان $f(x) \geq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[a,c]$ و $f(x) \leq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[c,b]$ فان المساحة هي

$$A = \int_a^c f(x)\,dx + \left| \int_c^b f(x)\,dx \right|$$

مثال (٢) جد المساحة الواقعة بين المنحني $y = \sqrt{x}$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 0\,, x = 4$.

الحل :

$$\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \in [0,4]$$

$$A = \int_0^4 \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (٣) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 4 - x^2$ والمحور السيني .

الحل: لإيجاد حدود التكامل نقاطع منحني الدالة $y = 4 - x^2$ مع المحور السيني $y = 0$

$$4 - x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \mp 2$$

$$4 - x^2 \geq 0 \quad \forall x \in [-2,2]$$

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\ dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

مثال (٤) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 2 , x = -3$.

الحل :

$$x^3 \geq 0 \quad \forall x \in [0,2] \quad and \quad x^3 \leq 0 \quad \forall x \in [-3,0]$$

$$A = \left| \int_{-3}^{0} x^3 \ dx \right| + \int_{0}^{2} x^3 \ dx = \left| \frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{0} \right| + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{81}{4} + 4 = \frac{97}{4}$$

مثال (٥) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ والمستقيمين $x = \pi$, $x = 0$.

الحل :

$$0 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ and \quad -1 \leq \cos x \leq 0 \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \ dx \right|$$

$$= \sin x \ \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \left| \sin x \ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right|$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 + \left| \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right|$$

$$= 1 + 1 = 2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثانياً : طول القوس

لتكن الدالة $y = f(x)$ مستمرة في الفترة $[a, b]$ فانّ طول قوس الدالة في تلك الفترة هو :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad dx \quad or \; L = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad dy$$

وإذا كانت $x = x(t)$ و $y = y(t)$ فانّ طول القوس هو :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \; dt$$

مثال (٦) جد طول قوس الدالة $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ في الفترة $[1,3]$.

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{4x^2}$$

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; dx = \int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x}\Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{53}{6}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (٧) جد طول قوس الدالة $y = x^{2/3}$ في الفترة $[0,8]$.

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

لاحظ هنا عندما $x = 0$ فان $\frac{dy}{dx} = \infty$ لذا يجب أنّ نجد $\frac{dx}{dy}$

$$y^3 = x^2 \quad \rightarrow \quad x = \pm y^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \pm\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{9}{4}y$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad and \quad x = 8 \quad \rightarrow \quad y = 4$$

$$L = \int_0^4 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1}\ dy = \frac{4}{9}\left(\frac{9}{4}y + 1\right)^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3}\Big|_0^4$$

$$= \tfrac{8}{27}\left[(10)^{3/2} - 1\right] = \tfrac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

مثال (٨) جد طول القوس للدالة $x = \sin^3 t$ و $y = \cos^3 t$ من $t = 0$ الى $t = \frac{\pi}{2}$

الحل :

$$\frac{dy}{dt} = -3\cos^2 t \sin t \qquad and \qquad \frac{dx}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} = 3\sin t\ \cos t = \frac{3}{2}\sin 2t$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2}\sin 2t\ dt = \frac{-3}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{-3}{4}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{-3}{4}(-1 - 1) = \frac{3}{2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين

١. جد قيم التكاملات المحددة التالية :

1. $\int_0^{\pi/4} \frac{(1+\sin x)dx}{\cos^2 x}$

2. $\int_0^{\pi/10} \sqrt{1+\cos 5x}\, dx$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

4. $\int_3^4 \frac{(x-3)dx}{x^2-6x+10}$

٢. جد المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = 2 - x^2$ والمستقيم $x + y = 0$.

٣. جد المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = 2x - x^2$ والمحور x .

٤. جد طول قوس الدالة $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ في الفترة $(0,1)$.

٥. جد طول قوس الدالة $x = (y^4/4) + (1/8y^2)$ من $y = 1$ الى $y = 2$.

٦. جد طول قوس الدالة $y = \ln \sec x$ في الفترة $(0, \pi/4)$.

٧. جد طول قوس الدالة $y = 1 - \cos t$, $x = t - \sin t$ من $t = 0$ الى $t = \pi/2$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحجوم الدورانية

١ـ لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني دالة $y = f(x)$ المستمرة من $x = a$ الى $x = b$ حول محور السينات نستخدم العلاقة

$$v = \int_a^b \pi y^2 dx$$

٢ـ لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني دالة $y = f(x)$ المستمرة من $y = a$ الى $y = b$ حول محور الصادات نستخدم العلاقة

$$v = \int_a^b \pi x^2 dx$$

مثال١ / المنطقة المحددة بين المنحني $0 \le x \le 4$, $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات ، دارت حول محور السينات ، جد حجمها .

الحل /

$$v = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 \pi x\, dx = \left[\pi \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \frac{16}{2} - 0 = 8\pi$$

مثال٢ / المنطقة المحددة بين المنحني $1 \le x \le 4$, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول محور الصادات جد حجمها .

الحل /

$$v = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_1^4 (\frac{1}{\sqrt{y}})^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{1}{y}\, dy = \pi[\ln y]_1^4$$

$$= \pi[ln4 - ln1] = \pi \ln 4 = 2\pi ln2$$ وحدة مكعبة

مثال٣ / اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ حول المحور السيني .

الحل /

$$v = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^2 8\pi x dx = [4\pi x^2]_0^2 = 16\pi - 0 = 16\pi$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال٤/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 5$, $x = 0$ حول المحور السيني .

الحل /

$$v = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^5 4\pi x^4 dx = \frac{4\pi}{5}\left[x^5\right]_0^5 = \frac{4\pi}{5}[312 - 0] = 2500\pi$$

مثال٥/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 16$, $y = 0$ حول المحور الصادي .

الحل /

$$v = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy = \pi \left[\frac{y^2}{8}\right]_0^{16} = \pi \left[\frac{16^2}{8} - 0\right] = 32\pi$$ وحدة مكعبة

س٣/ االوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ دورة كاملة حول المحور الصادي

الحل /

$$x = 1 \implies y = 1 \quad , \quad x = \frac{1}{2} \implies y = 2$$

$$v = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy = \pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^2 = \pi \left[\frac{-1}{2} + 1\right] = \frac{1}{2}\pi$$ وحدة مكعبة

س١ / اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2$ والمستقيمين $x = 2$, $x = 1$ حول المحور السيني .

الحل /

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{32}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{31}{5}\pi$$ وحدة مكعبة

س٢/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي .

$$y = x^2 + 1 \implies x^2 = y - 1$$

$$v = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_1^4 (y - 1) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_0^4$$

$$= \pi \left[\left(\frac{16}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \pi \left(4 + \frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{2}\pi$$ وحدة مكعبة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نظرة عامة2/

2 / A الفئة المستهدفة:-

طلبــة المرحلــة الأولـى
المعهـد التقنــي في البصــرة
قســم التقنيــات الكهربائية

2 /B الدوافع -:

أن يكتسب الطالب المعرفة الكافية بمفهوم الأعداد العقدية والعدد الجبري والصيغة القطبية، ويتمكن من التحويل بين الصيغ المختلفة وإجراء العمليات عليها وتوظيفها في التطبيقات الهندسية.

2 /C الفكرة الرئيسة -:

تهيئة الطالب بالاسس الرياضية اللازمة لفهم وتحليل وتصميم الانظمة الكهربائية والالكترونية، من خلال ربط المفاهيم الرياضية بالتطبيقات الهندسية الواقعية.

2 /D الأهداف السلوكية

بعد دراسة الوحدة الثانية من الكورس الثاني، سيكون الطالب قادرًا على

١. يعرف العدد العقدي ويميز بين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.
٢. يكتب العدد العقدي بالصورة الجبريةa+bi .

٣. يجري العمليات الأساسية(الجمع، الطرح، الضرب، القسمة)على الأعداد العقدية.
٤. يمثل الأعداد العقدية بيانياً في المستوى العقدي.
٥. يحُول العدد العقدي من الصورة الجبرية إلى الصيغة القطبية وبالعكس.
٦. يحسب المقياس Argument والطور زاوية القياس للعدد العقدي.
٧. يستخدم الصيغة القطبية في ضرب وقسمة الأعداد العقدية.
٨. يوظف الأعداد العقدية في تطبيقات هندسية وفيزيائية.

العدد المركب والصيغة القطبية

الاختبار القبلي

١. العدد العقدي هو:

أ) عدد حقيقي فقط

ب) عدد يتضمن جزءًا حقيقياً وآخر تخيلياً

ج) عدد كسري

د) عدد نسبي فقط

٢. الصورة الجبرية للعدد العقدي تكون على الشكل:

أ) $r \angle \theta$

ب) $a + bi$

ج) $a * b$

د) $x^2 + y^2$

٣. إذا كان $z = 3 + 4i$ فإن الجزء التخيلي هو:

أ) 3

ب) 4

ج) 7

د) i

٤. تحويل العدد العقدي من الشكل الجبري إلى الشكل القطبي يعتمد على:

أ) الجذر التربيعي فقط

ب) حساب الزاوية والمقياس

ج) الجمع والطرح فقط

د) لا يمكن تحويله

تعريف :

يقال للعدد الذي يكتب بالصيغة $(c = a + bi)$ حيث $a\,,b$ عددان حقيقيان و $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ عدد مركب حيث يسمى (a) الجزء الحقيقي $(real\ part)$ ويسمى (b) الجزء التخيلي (imaginary part) ويرمز لمجموعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$ ويرمز لجزؤه الحقيقي بالرمز R(C) ولجزؤه التخيلي بالرمز I(C) وتسمى الصيغة $(c = a + bi)$ بالصيغة العادية أو الجبرية للعدد المركب ويمكن وضعه بالصيغة الديكارتية للعدد المركب (a, b) وهي عبارة عن زوج مرتب حيث يستفاد منها في التمثيل الهندسي للأعداد المركبة وفي تطبيقات أخرى .

ويمكن حساب قوى العدد (i) كما في الأمثلة

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \,.\, i = (-1) \,.\, i = -i$$

$$i^4 = i^2 \,.\, i^2 = (-1) \,.\, (-1) = 1$$

$$i^{27} = i^{24} \,.\, i^3 = (i^4)^6 \,.\, (-i) = (1)^6 . (-i) = -i$$

$$i^{-15} = i^{-16} \,.\, i = (i^4)^{-4} \,.\, (i) = (1)^{-4} . (i) = i$$

ملاحظة :

يمكننا كتابة الجذر لأي عدد حقيقي سالب بدلالة (i) فمثلاً :

$$\sqrt{-15} = \sqrt{15} \,.\, \sqrt{-1} = \sqrt{15}i$$

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \,.\, \sqrt{-1} = 5i$$

خاصية التساوي

إذا كان $C_1 = a_1 + b_1 i$, $C_2 = a_2 + b_2 i$ فإن $C_1 = C_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$

أي إذا تساوى عددين مركبين فإن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي متساوين.

مثال جد قيمة كل من x, y الحقيقيتين التي تحققان المعادلة في كل مما يأتي :

$$2x - 1 + 2i = 1 + (y + 1)i$$

$\because 2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ الجزء الحقيقي

$\because 2 = y + 1 \Rightarrow y = 1$ الجزء التخيلي

عملية الجمع على الاعداد المركبة

عند جمع الاجزاء المركبة نجمع الاعداد الحقيقية مع بعضها والاجزاء التخيلية مع بعضها والناتج يكون عدد مركب ايضا وكما يلي:

$$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

مثال/ أوجد ناتج جمع الأعداد المركبة التالية :

(1) $c = 1 + 5i$, $w = 3 + 7i$, $z = -1 - i$

$$c + w + z = (1 + 5i) + (3 + 7i) + (-1 - i) = (1 + 3 - 1) + (5 + 7 - 1)i = 3 + 11i$$

(2) $2 + \sqrt{-2}$, $-5 + \sqrt{2}\, i$

$$(2 + \sqrt{2}\, i) + (-5 + \sqrt{2}\, i) = (2 - 5) + (\sqrt{2} + \sqrt{2})i = -3 + 2\sqrt{2}i$$

عملية الطرح على الاعداد المركبة

$$c_1 - c_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

مثال:جد ناتج

$(7 - 13i) - (9 + 4i)$

$(7 - 13i) + (-9 - 4i)$

$(7 - 9) + (-13 - 4)i = -2 - 17i$

مثال: حل المعادلة $(2 - 4i) + x = -5 + i$ حيث $x \in \mathbb{C}$

$x = -5 + i - (2 - 4i)$

$x = (-5 - 2) + (1 + 4)i$

$x = -7 + 5i$

عملية الضرب على الأعداد المركبة

أذا كان $(c = a + bi)$ ، $(z = g + fi)$ ، $k \in R$ فأن

(1) $c.z = (a + bi)(g + fi) = ag + afi + bgi + bfi^2 = (ag - bf) + (af + bg)i$

(2) $k.z = k(g + fi) = kg + kfi$

مثال:جد ناتج مايأتي

1) $(2-3i)(3-5i)$

$$(2-3i)(3-5i) = 6-10i-9i+15i^2$$

$$(6-15)+(-10-9)i = -9-19i$$

2) $(1+i)^2+(1-i)^2$

$$(1+i)^2+(1-i)^2 = (1+2i+i^2)+(1-2i+i^2)$$

$$= (1+2i-1)-(1-2i-1)$$

$$= 2i-2i$$

$$= 0$$

مرافق العدد المركب

أذا كان C عدد مركب فأن مرافقه يرمز له $\overline{C}$ أي أذا كان $C = a+bi$ فأن $\overline{C} = a-bi$.

فمثلاً : $3+i$ هو مرافق العدد $3-i$ وبالعكس ، وكذلك مرافق العدد (i) هو $(-i)$ وبالعكس .

$\sqrt{3}+2i$ هو مرافق العدد $\sqrt{3}-2i$ وبالعكس ، وكذلك مرافق العدد 3 هو 3 .

مثال: اذا كان $C_1 = 1 + i$, $C_2 = 3 - 2i$

(1) $\overline{C_1 + C_2} = \overline{C_1} + \overline{C_2}$

L.S $\overline{C_1 + C_2} = \overline{1 + i + 3 - 2i} = \overline{4 - i} = 4 + i$

R.S $\overline{C_1} + \overline{C_2} = \overline{1 + i} + \overline{3 - 2i} = 1 - i + 3 + 2i = 4 + i$ $\leftrightarrow$ L.S = R.S

(2) $\overline{C_1 - C_2} = \overline{C_1} - \overline{C_2}$

L.S $\overline{C_1 - C_2} = \overline{1 + i - 3 + 2i} = \overline{-2 + 3i} = -2 - 3i$

R.S $\overline{C_1} - \overline{C_2} = \overline{1 + i} - \overline{3 - 2i} = 1 - i - (3 + 2i) = -2 - 3i$ $\leftrightarrow$ L.S = R.S

قسمة الأعداد المركبة

عند قسمة عدد مركب على عدد مركب اخر نضرب بمرافق المقام وكما يلي

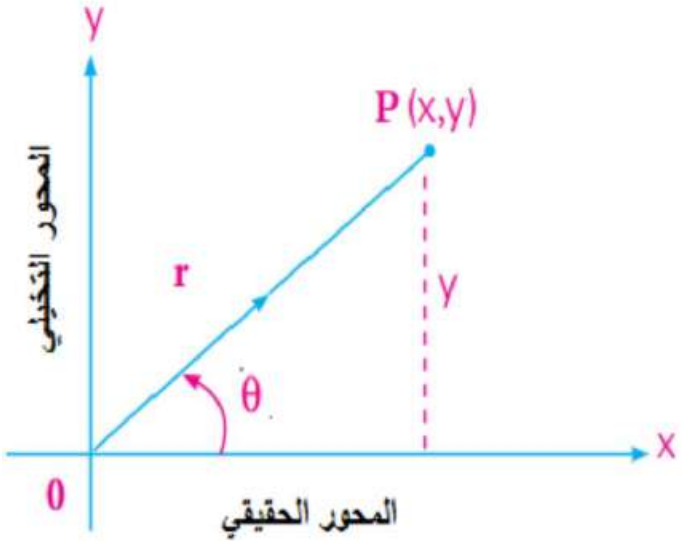
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} \times \frac{\overline{C_2}}{\overline{C_2}}$$

مثال: ضع مايلي بصورة (a + bi)

$$\frac{1+i}{1-i} \Rightarrow \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{2i}{2} = i = 0 + i$$

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

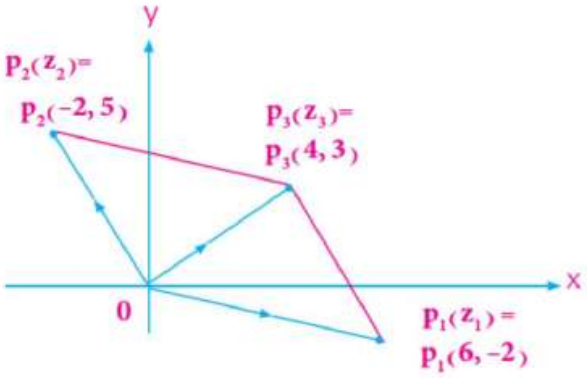
العدد المركب (x+yi) يمكن تمثيله هندسيا بالنقطة (x,y) حيث يسمى المحور (x_axis) بالمحور الحقيقي وهو يمثل الجزء الحقيقي من العدد المركب، اما المحور (y_axis) فيسمى المحور التخيلي وهو يمثل الجزء التخيلي من العدد المركب، ويمكن تمثيل بعض العمليات التي تجري على الاعداد المركبة تمثيلا هندسيا وتسمى الاشكال الناتجة بأشكال أرجاند ويسمى المستوي الذي يحتويها بالمستوي المركب



مثال: مثل العملية التالية هندسيا في شكل أرجاند $(6-2i)-(2-5i)$

$$Z_1 = 6-2i \Rightarrow P_1(6,-2)$$
$$Z_2 = 2-5i \Rightarrow P_2(-2,5)$$

$$Z_1 + (-Z_2) = (6-2i) + (-2+5i)$$
$$Z_1 + Z_2 = Z_3 = (4+3i)$$
$$Z_3 = (4+3i) \Rightarrow P_3(4,3)$$



الواجب البيتي

اذا كانت $z = -1-11i$ $w = -1-7i$,$c = 1+2i$ فأوجد ما يلي

$$-2c-4w+3z$$

الصيغة القطبية للعدد المركب

إذا كان $z = x + yi = (x,y)$ فإن $I(z) = y = r\sin\theta$, $R(z) = x = r\cos\theta$ حيث
أن $R(z)$ الجزء الحقيق للعدد المركب $I(z)$، الجزء التخيلي للعدد المركب (r)
، مقياس العدد المركب وهو عدد حقيقي غير سالب ويسمى $mod\ z$ ويرمز له
بالرمز $||Z||$ وتسمى (θ) سعة العدد المركب وتكتب $\theta = \arg(z)$ حيث $\theta \in [0,2\pi]$
ويمكن القول أن:

$$Z = \|z\|(\cos(\arg Z) + i\sin(\arg Z))$$

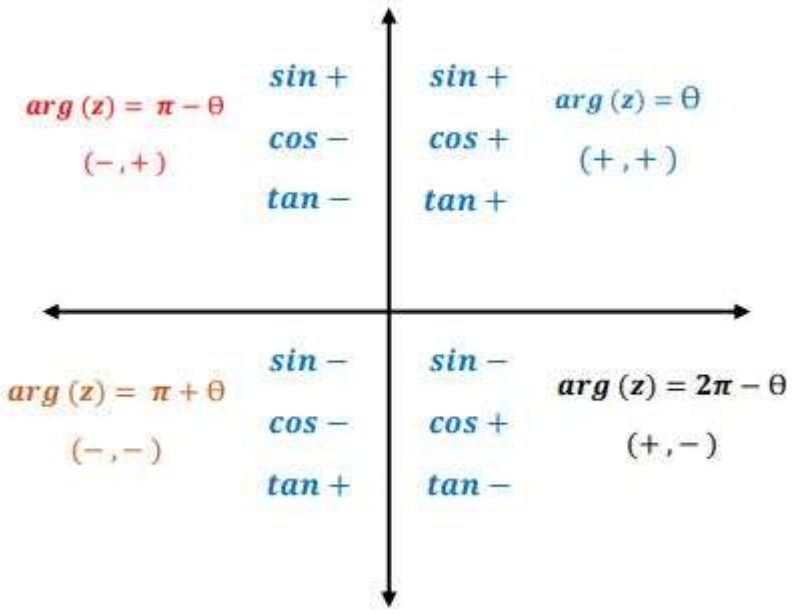
أو يكتب $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

المقياس $r = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{||Z||}\ ,\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{||Z||}$$

الشكل يوضح كيفية إيجاد الزاوية باستخدام زاوية الإسناد وحسب موقعها والربع
الذي تقع فيه.

(θ)إسناد الزاوية.



(١)- جد المقياس والقيمة الأساسية للعدد المركب $Z=1+\sqrt{3}i$

$$r=\text{mod}Z=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\|Z\|}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{\|Z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تقع في الربع الأول والقيمة الأساسية للسعة: $\theta=\arg(z)=\frac{\pi}{3}$

(٢)- إذا كان $Z=-1-i$ فجد المقياس والقيمة الأساسية للعدد Z

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد $\theta=\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الثالث.

القيمة الأساسية للسعة: $\theta=\arg(z)=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{1}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

الصيغة القطبية: $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow Z=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$

(٣)- عبر عن كل من الأعداد التالية بالصيغة القطبية:

$-2+2i$

المقياس: $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\quad,\quad\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

القيمة الأساسية:

زاوية الأسناد $\theta = \frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الثاني.

سعة العدد المركب: $\theta = \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

الصيغة القطبية: $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$Z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$2\sqrt{3} - 2i$$

المقياس: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{4\times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$

القيمة الأساسية:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

زاوية الإسناد $\theta = \frac{\pi}{6}$ تقع في الربع الرابع.

سعة العدد المركب: $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

الصيغة القطبية: $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$Z = 4[\cos(\frac{11\pi}{6}) + i\sin(\frac{11\pi}{6})]$$

(٤)- عبر بالصيغة القطبية عن كل من الأعداد التالية:

١

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+0}=\sqrt{1}=1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{1}=1\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0\ ,\ \theta=0$$

$$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$Z=1(\cos0+i\sin0)$$

-1

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+0}=\sqrt{1}=1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{1}=-1\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0\ ,\ \theta=\pi$$

$$Z=1(\cos\pi+i\sin\pi)$$

i

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0+(1)^2}=\sqrt{1}=1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{1}=1\ ,\ \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$Z=1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$$

-i

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0+1}=\sqrt{1}=1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{1}=-1\ ,\ \theta=\frac{3\pi}{2}$$

$$Z=1(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$$

تحويل الصورة القطبية الى صورة العدد المركب

$$Z=(r,\theta)\ \rightarrow\ Z=(x+yi)$$

صورة القطبية ↑ العدد المركب ↑

لأيجاد قيمة X نستخدم $X = r\ cos\theta$

لأيجاد قيمة y نستخدم $y = r\ sin\theta$

مثال/ حول الصورة القطبية الى عدد جبري $Z = (\ 5, 53\ )$

$$X = (\ r\ cos\theta\ ) = (\ 5\ cos53\ )$$

$$X = 5\ (\frac{3}{5})$$

$$X = 3$$

$$y = (\ r\ \ sin\theta\ ) = (\ 5\ sin53\ )$$

$$y = \ 5\ (\frac{4}{5}\ )$$

$$y = 4$$

$$Z = (\ x + yi\ )$$

$$Z = (\ 3 + 4i\ )$$

العمليات على الصورة القطبية

١) الضرب

اذا كان: $Z_1 = (r_1, \theta_1), Z_2 = (\ r_2, \theta_2)$

فإن $Z_1 Z_2 = (r_1 r_2\ , \theta_1 + \theta_2)$

٢) القسمة

اذا كان: $Z_1 = (r_1, \theta_1), Z_2 = (\ r_2, \theta_2)$

فإن $\frac{Z_1}{Z_2} = (\frac{r_1}{r_2}\ , \theta_1 - \theta_2)$

مثال / اذا كان $Z_1 = (1, 90), Z_2 = (2, 60)$ جد قيمة Z_1/Z_2, $Z_1 \times Z_2$

1) $Z_1 Z_2 = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2) = (1 \times 2, 90 + 60)$

$Z_1 Z_2 = (2, 150)$

2) $\frac{Z_1}{Z_2} = (\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2 = (\frac{1}{2}, 90 - 60)$

$\frac{Z_1}{Z_2} = (\frac{1}{2}, 30)$

٣)الجمع و الطرح

عند الجمع و الطرح يجب تحويل الصورة القطبية الى صورة جبرية ومن ثم نجمع ونطرح.

مثال/ اذا كان $Z_1 = (2, 30), Z_2 = (1, 0)$ اوجد $Z_1 + Z_2, Z_1 - Z_2$

$Z_1 = (2, 30)$

$X = r\ cos\theta = 2\ cos30 = 2\ (\frac{\sqrt{3}}{2})$

$X = \sqrt{3}$

$y = r\ sin\theta = 2\ sin30 = 2\ (\frac{1}{2})$

$y = 1$

$Z_1 = (\sqrt{3} + i)$

$Z_2 = (1, 0)$

$$X = r\ cos\theta = 1\ cos0 = 1\ \times 1$$

$$X = 1$$

$$y = r\ sin\theta = 1\ sin0 = 1 \times 0,$$

$$y = 0$$

$$Z_2 = (1 + 0i\ )$$

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$$

$$= (x_1 + x_2) + \ (y_1 + y_2)i$$

$$= \left(\sqrt{3} + 1\right) + (1 + 0)i$$

$$= \sqrt{3} + 1 + i$$

$$Z_1 - Z_2 = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)$$

$$= (x_1 + y_1) + (-x_2 - y_2)$$

$$= (x_1 - x_2) + \ (y_1 - y_2)i$$

$$= \left(\sqrt{3} - 1\right) + (1 - 0)i$$

$$= \sqrt{3} - 1 + i$$

الواجب البيتي

اذا كان اذا كان $l = (\ 1\ ,90\ ), \mathrm{m} = (2\ ,60\ )$ اوجد $l - m,\ \frac{l}{m},\ l * m,$