Ministry of high Education and Scientific Research
Southern Technical University
Technological institute of Basra
Department of Civil Techniques

Learning package

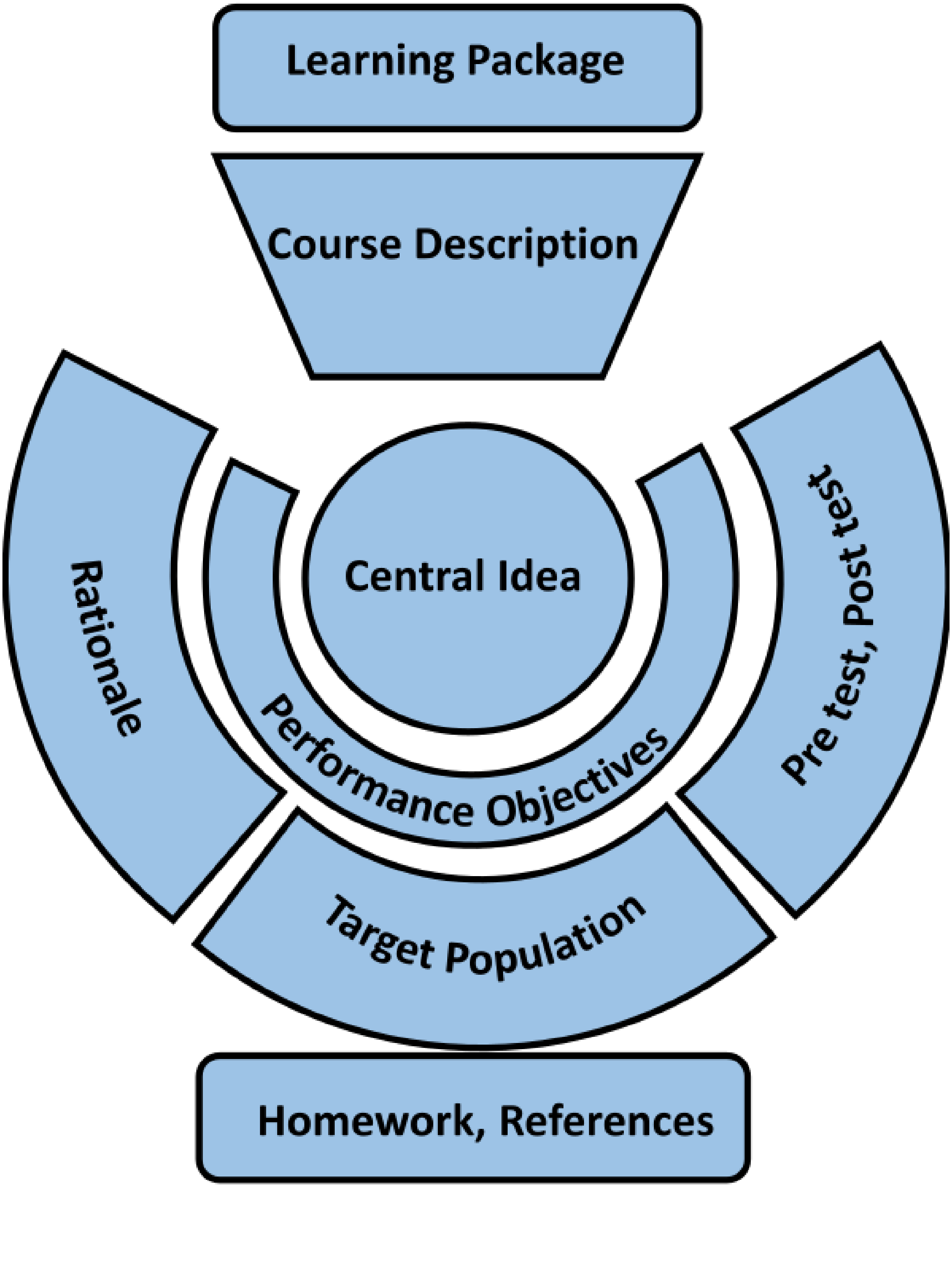
Calculus

For

First year students

By

Imad Raad Esahaiq
Assistant lecturer
Dep. Of Civil Techniques
2025


Learning Package
Course Description
Central Idea
Performance Objectives
Rationale
Pre test, Post test
Target Population
Homework, References

وصف المقرر

اسم المقرر
الرياضيات
رمز المقرر
لايوجد
الفصل / السنة
فصلي
عدد الساعات الدراسية (الكلي) / عدد الوحدات (الكلي)
3
اسم مسؤول المقرر الداراسي
الاسم : م.م. عماد رعد اسحيق   الأيميل : imad.r.esahaiq@stu.edu.iq
اهداف المقرر

اهداف المادة الدراسية	**تطوير إمكانية الطالب في استخدام الرياضيات في التطبيقات العملية والاستفادة منها في الدروس الهندسية الأخرى.** **تعلم الطالب الطرق المختلفة في تمثيل المعادلات والقوانين الرياضية والمعطيات المختلفة لتشكيل منحنيات في رسم بياني ويلائم مختلفة من المخططات تناسب والغرض من رسمها.**

استراتيجيات التعليم والتعلم

1.التعليم المباشر الموجّه
وفيه يشرح عضو هيئة التدريس المفاهيم الرياضية الجديدة بأسلوب مبسط ومنظّم، مع تقديم أمثلة متدرجة تليها تمارين تطبيقية. يركز هذا النوع على التوضيح المباشر والتدريب المنهجي. من أمثلته: شرح المصفوفات، المشتقات.

2. التعليم التعاوني
وفيه يُقسم الطلاب إلى مجموعات صغيرة، تعمل كل مجموعة على حل تمرين محدد أو تطبيق قانون معين ثم عرض النتائج أمام زملائهم. يشجع هذا النوع على تبادل المعرفة وتحسين الفهم من خلال النقاش. من أمثلته: حل مسائل هندسية أو إحصائية جماعيًا.

3.العرض البصري
وفيه تُستخدم الرسوم البيانية، الجداول، أو التمثيل البياني لتوضيح العلاقات الرياضية بين المتغيرات.من أمثلته: تمثيل دالة خطية على المحور البياني أو عرض نتائج إحصائية باستخدام أعمدة بيانية.

4.المراجعة النشطة
وفيه تُستخدم أنشطة سريعة مثل أسئلة فورية، بطاقات مفاهيم، أو مسابقات صغيرة لمراجعة المادة قبل التقييمات. تزيد من تفاعل الطلاب وتثبيت المعلومات. من أمثلته: منافسة لحل أكبر عدد من المعادلات خلال وقت محدد.

(الكورس الأول)

الأسبوع الأول

المصفوفات , المحددات, خواصها

المصفوفات , المحددات, خواصها

المصفوفات : هي مجموعة من العناصر المرتبة في m من الاسطر و n من الأعمدة (m,n) ويرمز للمصفوفة بالحروف الكبيرة A,B,C ويرمز لعناصر المصفوفة بالأحرف الصغيرة a,b, c وتستخدم كثيرا في حل منظومات المعادلات الخطية, كما تستخدم كثيرا في علم الأقتصاد .

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{vmatrix}$$

a_{ij} هو العنصر الذي يقع في الصف i والعمود j .

i=1,2,-----m j= 1,2,----n

Ex) A= |aij | حيث aij = ij – 2 اذا كان , (3,2) اكتب المصفوفة

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix}$$

aij = ij -2

a11 = 1*1-2= -1

a12 = 1*2 -2= 0

a21 = 2*1 – 2 = 0

a22 = 2*2 -2 = 2

a31 = 3*1 -2 = 1

a32 = 3*2 -2 = 4

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Hw) B=[bij] حيث $b_{ij} = i^2 – 2j$ اذا كان (3,4) اكتب المصفوفة

بعض العمليات الجبرية على المصفوفات

جمع وطرح المصفوفات لجمع المصفوفتان A , B يجب ان تكونان من نفس الرتبة (m,n) , فيتم الجمع مع العناصر المتناظرة او المتقابلة في كل مصفوفة .

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad , \quad B = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A + B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Ex) اطرح $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$,

$$A - B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & \end{vmatrix}$$

<u>ضرب وقسمة المصفوفات :</u>

) يمكن ان نضرب اية مصفوفة في قياسي (مقدار كمي k) او عدد حقيقي وذلك بضرب كل عنصر من عناصرها في ذلك القياسي.

$A = [a_{ij}]$ → $kA = [ka_{ij}]$

Ex) **جد قيم a,b,c,d اذا كان**

$$2\begin{vmatrix} a & -b \\ 3a & -2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 1 \\ c & 3+2d \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & a-b \\ a+b & 2c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2a & -2b \\ 6c & -4d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a+3 & 1-3a+3b \\ c-3a-3b & 3+2d-6c \end{vmatrix}$$

وبتساوي العناصر المتناظرة نحصل على المعادلات الأربعة التالية

2a = 3a + 3 -- -------- (1

-2b = 1-3a+3b ------------ (2

6c = c-3a – 3d ------------ (3

- 4d = 3+ 2d – 6c --------- (4

وبحل المعادلة 1 نحصل على a=-3 وبتعويضها في 2 نجد b=-2 ثم التعويض في 3 نجد c=3 واخيرا نحصل على d= 5/2 .

2) عند ضرب مصفوفتان يجب ان يكون عدد الأعمدة في المصفوفة A تساوي عدد الصفوف في المصفوفة B وتسمى المصفوفتان متوافقتان . ويتضح من هذا الشرط ليس ضرب العناصر المتقابلة وانما ضرب صفوف من الأولى في اعمدة من الثانية , اي ضرب العنصر الأول من الصف الأول في العنصر الأول من العمود الأول والثاني في الثاني وهكذا ثم تجمع نواتج الضرب . او ضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول في عناصر اعمدة المصفوفة الثانية ثم الصف الثاني وهكذا .

وبذلك يكون الضرب معرفا وممكنا اذا كان عدد اعمدة A مساويا لعدد صفوف B وبخلافه فان الضرب غير معرف .

Ex) $A = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ B $= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ لان ضرب AB يكون معرفا ويكون 3*2

A→3*2 , B→2*2

$$\mathrm{A} * \mathrm{B} = \begin{vmatrix} 6*-1+4*5 & 6*2+4*3 \\ 3*-1+-2*5 & 3*2+-2*3 \\ 1*-1+0*5 & 1*2+0*3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 24 \\ -13 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

AB =C$= \begin{vmatrix} c11 & c12 \\ c21 & c22 \\ c31 & c32 \end{vmatrix}$

حيث c11$= \begin{vmatrix} 6 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 5 \end{vmatrix}$ = 6(-1)+4(5)=14

C12 $= |6 \quad 4| \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ = 12+12=24

C21 $= |3 \quad 2| \begin{vmatrix} -1 \\ 5 \end{vmatrix}$ = -3-10 = -13

C22 $= |3 \quad -2| \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ = 6-6 = 0

C31$= |1 \quad 0| \begin{vmatrix} -1 \\ 5 \end{vmatrix}$ = -1 +0 = -1

C32$= |1 \quad 0| \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ = 2+0 = 2

AB $= \begin{vmatrix} 14 & 24 \\ -13 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

HW) واجب بيتي A$= \begin{vmatrix} 5 & 11 & 7 \\ -6 & 2 & 9 \end{vmatrix}$, B$= \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ جد كلا من BA , AB ان كان ذلك ممكنا.

المحددات

عبارة عن مجموعة عناصر تكتب على شكل صفوف وأعمدة رباعي الشكل ومحصور بين مستقيمين شاقوليين _ويكون عدد الصفوف مساوي لعدد الأعمدة . ويكون اما من الرتبة الثانية او الثالثة او الرابعة حسب عدد الصفوف والأعمدة .

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

لحساب قيمة المحدد من الرتبة الثانية :نضرب نهاية الأقطار مع بعضها ثم نحسب الفرق بين حاصلي الضرب .

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 + a_2 b_1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 * 3 - 2 * 5 = -7$$

لحساب قيمة المحدد من الرتبة الثالثة

نستخدم طريقة التجزئة وهي طريقة ايجاد المحددات المساعدة .

المحدد المساعد

لكل عنصر , هو المحدد الذي يحوي عناصر المحدد الاصلي عدا العناصر الواقعة في الصف والعمود للعنصر المراد ايجاد محدده المساعد.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \cancel{c_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ A_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

لتحديد معامل العنصر هو المحدد المساعد للعنصر مع الأخذ بنظر الأعتبار الأشارة لكل عنصر في هذه الحالة يسمى معامل العنصر.

$$\begin{vmatrix} B_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$$

لايجاد قيمة المحدد يستخدم مفكوك لابلاس **Laplace** , حيث ان

قيمة المحدد = مجموع حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف او العمود الواحد × معامله

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-7) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(5*3 – 2*4) -3(1*3-4*3) -7(1*2-5*3)$$

$$= 14 + 27 + 91 = 132$$

لا تتغير قيمة المحدد اذا طبق مفكوك لابلاس باستخدام عناصر اي صف او عمود .

<u>ملاحظة</u>   الأفضل نختار الصف او العمود المحتوي على الصفر لأختصار الحل .

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2(10-12) - 0 + 7(4-12) = -60$$

<u>خواص المحددات</u> تستخدم لتبسيط المحدد عند ايجاد قيمته.

1. العامل المشترك لعناصر اي صف او عمود لمحدد ما يمكن اخراجه خارج المحدد كعامل لذلك المحدد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

2 – اذا كانت عناصر أي صف او عمود باجمعها أصفارا فان قيمة المحدد يساوي الصفر.

3 - اذا ضربت عناصر أي صف او عمود في عدد معين وجمعت على صف او عمود اخر فان قيمة المحدد لا تتغير . تستخدم للحصول على اصفار

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

مثلا في المحدد السابق , يضرب العمود الأول في 2- , ثم يجمع مع العمود الثاني.

4 – يمكن تبديل اي صفين او عمودين متتاليين فان قيمة المحدد تبقى بعد تبديل اشارته فقط .

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

5 – اذا كانت عناصر اي صفين او عمودين متساوية او مضاعفات لها فان قيمة المحدد يساوي الصفر.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 6 & 36 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 25 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

نرجع الى مثال الخاصية (3) لأكمال الحل

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\,(5 - 6) = -3$$

الأسبوع الثاني

حل المعادلات الخطية , طريقة كرامير,تطبيقات على المحددات

حل المعادلات الخطية , طريقة كرامير,تطبيقات على المحددات

بوجود ثلاث معادلات خطية ذات ثلاث مجاهيل , تحل بواسطة قاعدة كرامير(Grammers role) . ان قيمة كل من x , y , z عبارة عن كسر مقامه محدد يتكون عناصره من عوامل المجاهيل أعلاه , وبسطه لكل مجهول عبارة عن المحدد نفسه بالمقام بعد استبدال عوامل المجهول بالثوابت في المعادلات .

غلى ان تكون $D \neq 0$

Ex) $x + y + z = 1$

$2x - y + z = 0$

$X + 2y - z = 4$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 - (-1) = 6+1 = 7$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & - \end{vmatrix}}{7} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-1(-8)}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-(-4-3)}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-(12-5)}{7} = \frac{-7}{7} = -1$$

Home Work(H.W)

$2x + 3y - z = -1$

$x - 6y - 5z = 4$

$3x + 4y + 2z = 14$ $\qquad\qquad$ $x=6, y=-3, z=4$

H.W) $\quad 2x - y + z = 4$

$x + 3y + 2z = 12$

$3x + 2y + 3z = 16$

لا توجد قيم محددة لان D=0

<u>تطبيقات على المحددات</u>

Ex)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -72$$

Home Work(H.W)

جد قيمة المحدد الآتي :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ex) **جد قيمة (x) التي تجعل المحدد الاتي يساوي صفر**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & X^2-1 \\ 0 & x^2-1 & x^4-1 \end{vmatrix} = 0$$

$X = 0 , \quad x = +,- 1$

Ex)

$$\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow x = 0 , 1$$

اوجد قيمة (x) التي تجعل المحدد الاتي يساوي صفر .

$$D = \begin{vmatrix} x & x & -2 \\ 1 & x & -2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} \longrightarrow \quad x=1$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x^2 & x^4 \end{vmatrix} = -3(x^4 - x^2) = 0$$

اما $(x^4 - x^2) = 0$

$x^2(x^2 - 1) = 0 \longrightarrow x^2 = 0 \quad , x = 0$

$x^2 = 1 \quad , x = +, -1$

Ex)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -10 & -19 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -10 & -19 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -30 + 95 = 65$$

الأسبوع الثالث والأسبوع الرابع

المتجهات, تحليل المتجهات,الكميات المتجهة والقياسية

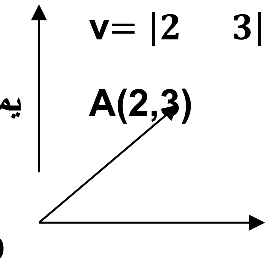
وحدة المتجهات المتعامدة, مقياس المتجه , الضرب القياسي والإتجاهي, تطبيقات على المتجهات.

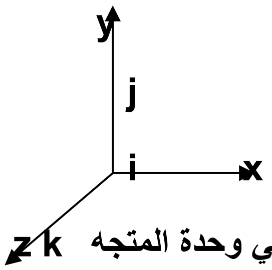
المتجهات, تحليل المتجهات,الكميات المتجهة والقياسية

وحدة المتجهات المتعامدة, مقياس المتجه , الضرب القياسي والإتجاهي, تطبيقات على المتجهات.

تعرف الكميات في الفيزياء مثل درجة الحرارة, الحجم, والكتلة كل منها تتعين بقيمتها التي هي عدد حقيقي ويطلق على مثل هذه الكميات مقادير قياسية scalar . كما توجد كميات اخرى مثل القوة والتعجيل والسرعة المتجه , وكل منها تتميز بان لها قيمة واتجاه , ويطلق على مثل هذه الكميات , المتجهات. ويعبر عن المتجهات في المستوي او الفضاء بخط مستقيم طوله يتناسب مع قيمته. وراس السهم يمثل اتجاهه ويكتب $v = |2 \quad 3|$

يمثل المتجه ويكتب $oA^{\rightarrow}$





يمكن كتابة المتجه للمحاور الثلاثة x,y,z كما يلي $A^{\rightarrow} = ai + bj + ck$ حيث i هي وحدة المتجه z k

باتجاه المحور x , وj وحدة المتجه باتجاه المحور y , وk وحدة المتجه باتجاه z .

ويرمز لطول المتجه بالرمز |A| $\quad |A| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

طول وحدة المتجه = 1

<u>الجمع والطرح للمتجهات</u>

اذا كان $A^{\rightarrow} = 3i + 2j + 3k$, $B^{\rightarrow} = 6i + 2j + 3k$ اجمع المتجهين

$\bar{A} + \bar{B} = 9i + 4j + 6k$

<u>ضرب المتجهات</u>

<u>ضرب المتجه بعدد قياسي (k) او بعدد ثابت</u>

$\bar{A} = ai + bj + ck$

$k\bar{A} = k\,(ai + bj + ck)$

Ex) اذا كان

$\bar{A} = 3i + 2j + 3k \quad , \quad \bar{B} = 6i + 2j + 3k$

جد $|A|, |B| \quad , \quad \bar{A}+\bar{B} \quad , \quad \bar{A}-\bar{B} \quad , \quad 3A \quad , \quad 2B \quad , \quad 3\bar{A}-2\bar{B}$

الحل $|A| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{3^2+2^2+3^2} = \sqrt{32}$

$|B| = 7 \;,\;, \quad \bar{A}+\bar{B} = 9i+4j+6k \quad , \quad 3\bar{A}-2\bar{B} = -2i+2j+2k$

ضرب المتجهين العمودي والافقي , الناتج هو مجموع حاصل ضرب كل مركبة من A في نظيرتها في B

Ex) : يمكن التعبير عن المعادلة التالية كحاصل ضرب متجهين وكما يلي

$Y = 4x_1 + 5x_2 - 3x_3$

$$Y = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix}$$

Ex) x ,y , z جد قيم

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 2x \\ -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y-x \\ -6 \\ y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2+y-x \\ 2x-6 \\ -3+y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

y-x+2 =0

2x -6 =0

y+z -3 =0

ومنها نجد x=3, y=1 , z=2

Homework

جد حاصل الضرب القياسي لما ياتي

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \\ -5 \end{vmatrix}$$

Ex) A =$\begin{vmatrix} 5 & 11 & -4 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

3A = $\begin{vmatrix} 15 & 33 & -12 & 21 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ 9 \\ 5 \\ 4 \end{vmatrix}$$

2) اذا كان $A = \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}$

جد A+ 2B , 3A – B + 5C

Ex) لتكن

$A = \left|\frac{10}{4} \quad -3\right|$, B= $|2.5 \quad -3|$, C = $|2 \quad -3|$

10/4 = 2.5 , A= B , A ≠ C

Ex) Find x , y if [2x -12 7] = [-4 -12 3y]

2x = -4 → x = -4/2 = -2

3y = 7 → y = 7/3

الضرب العددي القياسي (Dot product) الضرب العددي لمتجهين يرمز لهما A.B ويقرا A dot B هو حاصل الضرب لمقدار المتجه $(\bar{A}, \bar{B})$

A.B = |A| |B| Cosϴ

اذا كان $\bar{A} = a_1i + b_1j + c_1k$

$\bar{B} = a_2i + b_2j + c_2k$

اذا علمت المتجهات فان الضرب العددي لهما هو $A.B = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

$|A| = \sqrt{a_1^{\,2} + b_1^{\,2} + c_1^{\,2}}$, $|B| = \sqrt{a_2^{\,2} + b_2^{\,2} + c_2^{\,2}}$

Ex) A= 2i+2j-k , B = 6i-3j+2k جد الزاوية المصنوعة بين المتجهين

A.B = |A| |B| Cosϴ

$A.B = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

A.B = 2*6 + 2*-3 + -1*2 = 12-6-2 = 4

$|A| = \sqrt{2^2 + 2^2 + -1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|B| = \sqrt{6^2 + -3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$

$A.B = |A|\,|B| \cos\theta$

$4 = 3 * 7 \cos\theta$

$\cos\theta = 4/21$, $\theta = \cos^{-1} 4/21 = 79°$

الضرب الأتجاهي Cross Product ويرمز له A* B ويقرا AcrosB وناتج الضرب يعطي متجها ثالثا ويعرف على انه حاصل الضرب لمقادير A , B و Sin الزاوية المحصورة بينهما وكما في المعادلة

$$A*B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \end{vmatrix}$$

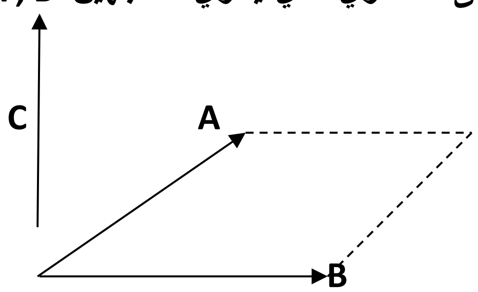
Ex) جد الضرب الأتجاهي للمتجهين

A = 3i +2j +k

B = 2i + 2j + 3k

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$ = I (6-2) – j (9-2) + k (6-4) = 4i - 7j + 2k

حيث ان المتجه الناتج من الضرب الأتجاهي A*B يكون عموديا على المستوي الذي يحوي المتجهين A , B .



وطوله = مساحة متوازي الأضلاع االتي اضلاعه A,B

ومساحة المثلث = ½ مساحة متوازي الأضلاع

Ex) P(3,2,1) , Q(4,6,3) جد طول المتجه الواصل بين النقطتين

$\vec{PQ} = (a_2-a_1)\, I + (b_2-b_1)j + (c_2-c_1)k$

= (4-3)I + (6-2)j + (3-1)k

$\vec{PQ}$ = 1I +4J + 2K

$|PQ| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$

Ex) $A = 2i - 6j - 3k$, $B = 4i + 3j - k$ اذا كان لدينا المتجه

- جد الضرب الأتجاهي A*B
- المتجه العمودي على المستوي الذي يحتوي المتجهين (A,B)
- مساحة متوازي الأضلاع
- مساحة المثلث

الحل $A*B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15i - 10j + 30k$

طول المتجه العمودي على المستوي هو نفسه الناتج من A*B اي $15i - 10j + 30k$

طول المتجه العمودي = مساحة متوازي الأضلاع

$|A*B| = \sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2} = \sqrt{1225}$

مساحةالمثلث = ½ مساحة متوازي الأضلاع = $35/2 = \sqrt{1225}/2$

Ex) $Q(2,-1,1)$, $P(1,3,2)$, $R(-1,2,3)$ جد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط

$PQ = (a_2 - a_1)\, I + (b_2 - b_1)j + (c_2 - c_1)k$

$PQ = (2-1)i + (-1-3)j + (1-2)k = i - 4j - k$

$PR = (-1-1)I + (2-3)J + (3-2)K = -2i - j + k$

مساحة المثلث = ½ مساحة متوازي الأضلاع = $\frac{1}{2}|\vec{PQ}\ \vec{PR}|$

$\vec{PQ} * \vec{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5i + j - 9k$

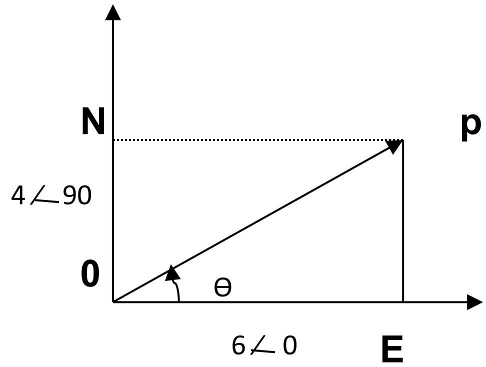
$= \frac{1}{2}|\vec{PQ} * \vec{PR}| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + 1^2 + 9^2} = \frac{1}{2}\sqrt{107}$

Hw) $P(3,-1,2)$, $Q(1,-1,3)$, $R(4,-8,1)$ جد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط

<u>الكميات المتجهة</u>

لتعيين موقع جسم متحرك بدقة يجب معرفة قيمة الأنطلاق واتجاهه بالنسبة لأتجاه ثابت , وان اي كمية تحتاج في تعيينها الى اتجاه ومقدار تسمى كمية متجهة . السرعة هي الأنطلاق باتجاه معين , كذلك القوة والتعجيل ,---

Ex1) قارب يسير في نهر جاري بسرعة 6 km/h نحو الشرق وسرعة تيار الماء 4 km/h نحو الشمال

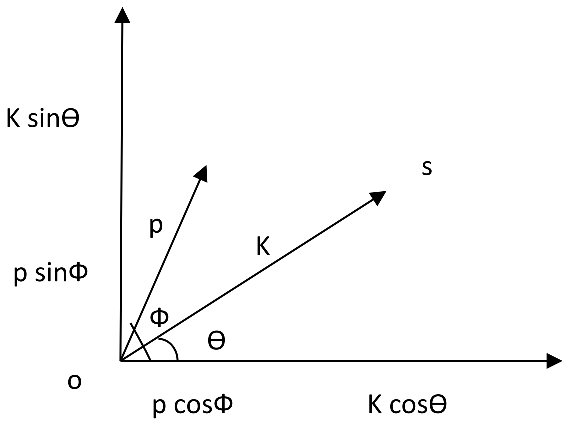


إذن المحصلة تكون

$$op = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7.21$$

$$\tan \Theta = 4/6 \quad , \quad \rightarrow \quad \Theta = 33°42'$$

اما عند الجمع بين متجهين مثل المتجه $k\angle_{\Theta}$ تحلل الى المركبتين الأفقية $k \cos\Theta$ والعمودية $k \sin\Theta$, كذلك المتجه p .



$$x = k\cos\Theta + p\cos\Phi$$

$$y = k\sin\Theta + p\sin\Phi$$

os المحصلة لمجموع المركبتين

$$os = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\gamma = \sin\gamma / \cos\gamma$$

Ex) ارسم المتجهات وجد المحصلة للقوى $\overrightarrow{6\angle 30}$ ، $\overrightarrow{8\angle 60}$

$x = 6\cos 30 + 8\cos 60$

$y = 6\sin 30 + 8\sin 60$

$x = 3\sqrt{3} + 4 \quad , \quad y = 3 + 4\sqrt{3}$

$x^2 + y^2 = 43 + 24\sqrt{3} + (9 + 24\sqrt{3} + 48) = 43 + 24\sqrt{3} + 57 + 24\sqrt{3} = 100 + 48\sqrt{3} = 183$

$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{183} = 13.5$ المحصلة

$\tan\theta = y / x$

$$= \frac{3 + 4\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + 4}$$

الأسبوع الخامس

الدالة function , الدوال المثلثية والعلاقات المثلثية

الدالة function , الدوال المثلثية والعلاقات المثلثية

مفهوم الدالة:

في التفاضل والتكامل غالبا" ما نتعامل مع العلاقات الموجودة بين المتغيرات , مثل المسافة والسرعة للجسم , او المسافة والزمن . هذا النوع من العلاقات تسمى الدالة .

فالدالة هي علاقة بين متغيرين , حالما تعرف قيمة المتغير الأول فأن تمثيل قيمة المتغير الثاني يكون معلوما" أيضا". كما أن الدالة هي مجموعة الحداثيات لنقاط (x ,y) بحيث أن لكل قيمة للمتغير الأول (x) لا توجد الا قيمة واحدة فقط للمتغير الثاني (y) .

تمثل الدالة بالرمز f (x) وان قيمة الدالة تساوي y . أي y = f (x) . وان قيم (x) هي التي تحدد قيم (y) . قيم (x) تسمى مجال الدالة Domain وتسمى المتغير المستقل , وقيم (y) تسمى مدى الدالة Range وهي القيم المناظرة لقيم (x) وتسمى المتغير المعتمد.

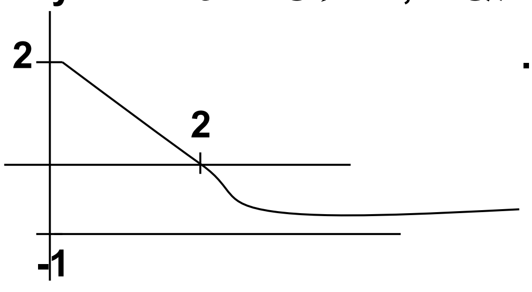
Ex 1 : Let $x \ge 0$

$$y = \frac{2 - x}{x + 1}$$

لايجاد قيم المدى للدالة في المثال , نعوض عن (x) جميع النقاط ≤ 0 , لاستخراج قيم y . وبذلك يتم رسم الدالة

x	y
0	2
1	1/2
2	0
3	-1/4
4	-2/5

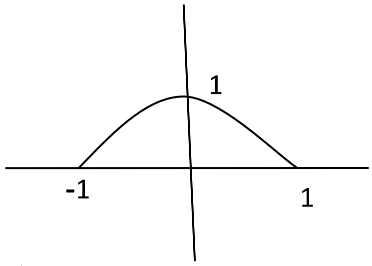
عند تعويض قيم x نجد قيم y تأخذ جميع القيم المحصورة بين 2 , 1- . إذن المدى $-1 < y \le 2$
حيث ان كلما كبرت قيمة x نجد قيمة y تقترب من 1- .



Ex 2 : $y = \sqrt{1 - x^2}$ **أوجد مجال ومدى الدالة**

لكي يكون تحت الجذر عدد حقيقي , يجب أن يكون $x^2 \le 1$ أي أن $-1 \le x \le 1$ وهذا هو المجال .

اما المدى فهو $0 \le y \le 1$. اي عند جعل $x = 0$ تكون $y = 1$ وعند $x = \pm 1$ تكون $y = 0$.



Ex3: اوجد المجال والمدى للدالة المعرفة بالمعادلة التالية حيث هي الأعداد الصحيحة الموجبة والتي قيمها أقل من العدد 10.

$Y = f(x) = 2x - 6$

$X = (1, 2, \ldots\ldots\ldots, 9)$

$f(1) = 2 (1) - 6 = -4$

$f(2) = 2(2) - 6 = -2$

$f(3) = 2(3) - 6 = 0$

-

-

$F(9) = 2(9) - 6 = 12$

المجال لـ x هو $0 < x < 10$. اما المدى لـ y هو $-4 \le y \le 12$.

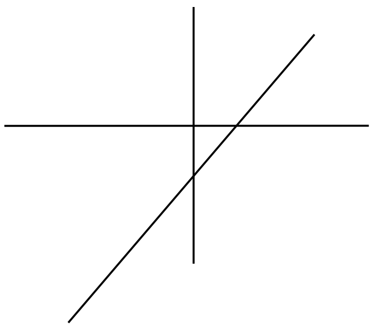
تمثيل الدالة بيانيا" :

حيث تعتبر الدالة مجموعة احداثيات نقاط (x,y) , وباستخدام نظام الأحداثيات وفرض قيم اختيارية لـ x المستقل , ونحسب قيم التابع y التي تحقق المعادلة .

Ex 4 ارسم بيانيا" المنحني الذي يمثل الدالة $f(x) = 2x - 1$

نفرض قيم اختيارية للمتغير المستقل x ونحسب قيم المتغير التابع y التي تحقق المعادلة $y = 2x - 1$.

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	5	3	1	-1	-3	-5	



Ex 5 : مثل الدالة التالية بيانيا"

$Y = 2x - x^2$

تعطى قيم اختيارية لـ x ثم تحسب قيمة y .

$Y_0 = 2(0) - (0)^2 = 0$

$Y_1 = 2(1) - (1)^2 = 1$

$Y_2 = 2(2) - (2)^2 = 0$

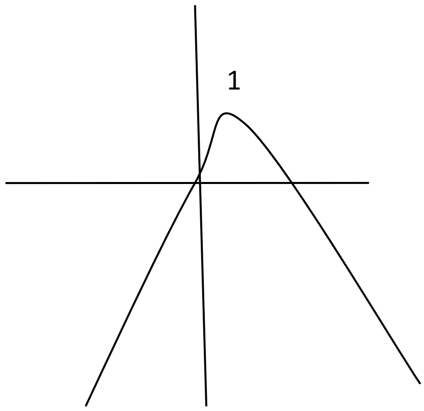
$Y_3 = 2(3) - (3)^2 = -3$

-

-

-

x	y
2	0
1	1
0	0
-1	-3
-2	-8



H.W 1 : ارسم بياني الدالة

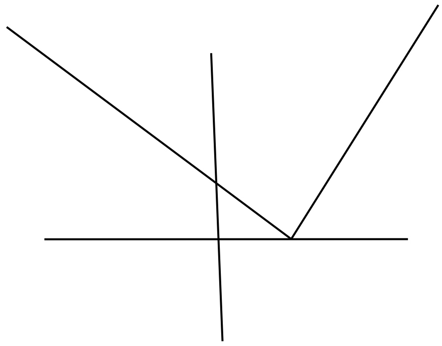
$y = |x - 2|$

عندما $x = 2$ فان $y = 0$ وهو جذر (صفر) المعادلة $|x - 2| = 0$, بالرغم من ان المنحني لا يقطع محور السينات الا انه يقابه عند هذه النقطة .

x	-3 -2 -1 0 1 2 3 4
y	5 4 3 2 1 0 1 2

$-\infty < x < \infty$

$0 \leq y < \infty$



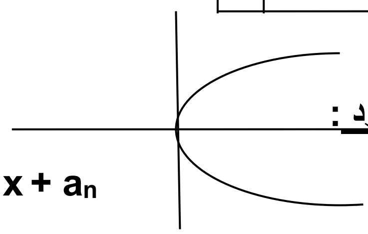
HW2: ارسم بيانيا المنحني الذي يمثل العلاقة

$y^2 = x$

x	0 1 4 9
y	0 ±1 ±2 ±3

$y = \pm\sqrt{x}$ $\quad 0 \leq x < \infty \quad , \quad -\infty < y < \infty$.

هناك قيمتان للمتغير y مقابل كل قيمة لـ x .



<u>الدوال المتعددة الحدود</u> :

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$$

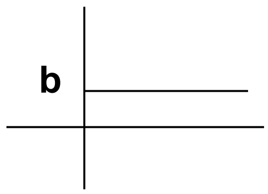
حيث $a \neq 0$, n عدد صحيح موجب او صفر.

n = مقادير ثابتة $0,1,2,3,\ldots,n$

ومن انواع هذه الدوال

<u>الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الأولى (الدالة الخطية)</u>: وتكتب

الدالة الخطية العامة $y= f(x) = mx +b$



حيث m,b مقادير ثابتة

m = ميل المستقيم الذي يوازي المحور السيني

b = طول الجزء المقطوع من المحور الصادي

<u>جذور المعادلة :</u> جذر او (صفر) اي دالة هو الأحداثي السيني للنقطة التي يمس او يقطع عندها منحني الدالة محور السينات .

لرسم منحني الدالة الخطية , نعين جذور المعادلة وهي نقاط تقاطع منحني الدالة مع محور السينات, حيث $y=0$ اي ان : $y = mx + b$

$y=0$

$mx= -b$

وعندها نعرف قيمة x $x= -b/m$

Ex: . ارسم منحني الدالة التالية

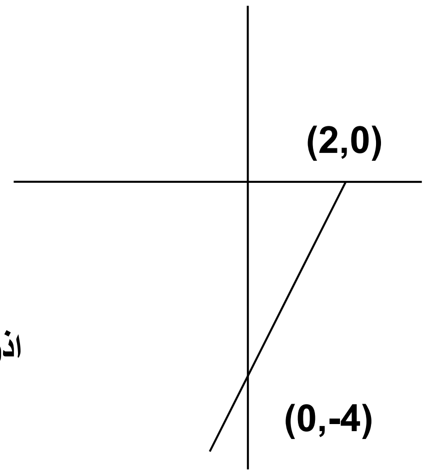
$y =2x - 4$

$0 = 2x - 4$

$4 = 2x$, $x = 2$ $\longrightarrow$ $(2,0)$ جذر المعادلة

$y =2(0) - 4$

$y = - 4$ $(0,-4)$



اذن لهذه المعادلة جذر حقيقي واحد (موجب)

<u>الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية :</u> ويكون شكل الدالة منحني يطلق عليه القطع المكافئ.

نعين نقاط تقاطع منحني الدالة $y = f(x)$ مع المحور السيني أي أن نجعل $y =0$ ونجد جذور المعادلة.

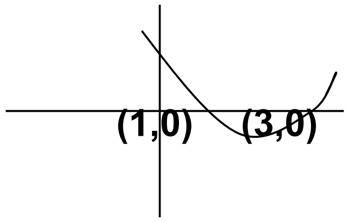
بالتحليل او بواسطة المميز . شكل المعادلة من الدرجة الثانية يكون $y = ax^2 + bx + c$

Ex) $y = x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 3)(x - 1) = 0$

$x = 3 , x = 1$

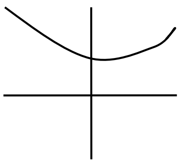
جذرين حقيقيين



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

اذا كان المميز (المقدار تحت الجذر) موجب , يوجد جذر حقيقي

واذا المميز سالب فلا يوجد جذر حقيقي أي لا يقطع محور السينات مثل $y = x^2+4$ **حيث الجذر** $x = \frac{-0 \pm \sqrt{0-4}}{2}$



Ex) **جد جذري المعادلة**

$y = - x^2 \pm 2x$

$- x(x - 2) = 0$

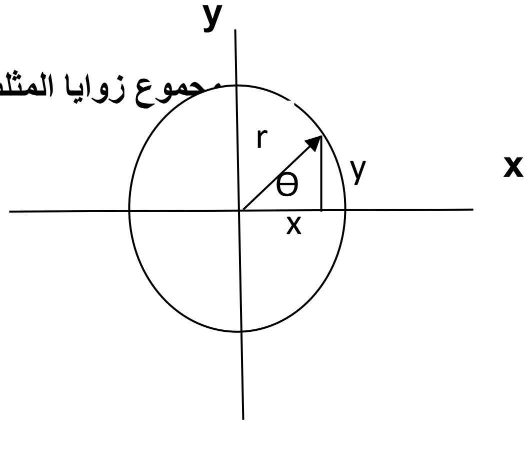
اما $x=0$, **او** $x=2$

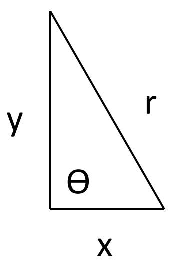
او $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-0}}{-2}$, $x = \frac{-2 \pm 2}{-2}$ **المميز موجب** $x \in (0,2)$

<u>الدوال المثلثية والعلاقات المثلثية</u>

للمثلث ستة نسب مثلثية وتسمى الدوال المثلثية او الدائرية لأحتوائه علىثلاثة أضلاع وثلاث زوايا حيث تطلق تسمية خاصة على النسبة بين اي ضلعين من اضلاعه وزاوية وهي ----- , Sine,Cosine, tangent

مجموع زوايا المثلث بالتقدير الستيني = °180





من اهم دالتين

$\sin\Theta = y / r$

$\cos\Theta = x / r$

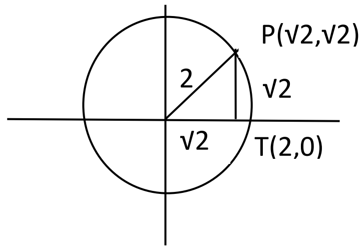
$\tan\Theta = y / x = \sin\Theta / \cos\Theta$ ومنها نستخرج

$\cot\Theta = x / y = \cos\Theta / \sin\Theta$

$\sec\Theta = r / x = 1 / \cos\Theta$

$\csc\Theta = r / y = 1 / \sin\Theta$

Ex) من الشكل جد النسب المثلثية الست للزاوية Θ



$\sin\Theta = \sqrt{2} / 2 = 1 / \sqrt{2}$

$\cos\Theta = \sqrt{2} / 2 = 1 / \sqrt{2}$

$\tan\Theta = \sqrt{2} / \sqrt{2} = 1$

$\sec\Theta = 2 / \sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\cot\Theta = \sqrt{2} / \sqrt{2} = 1$, $\csc\Theta = 2 / \sqrt{2} = \sqrt{2}$

<u>قوانين النسب المثلثية المهمة</u> نرجع للرسم الدائري السابق

$r^2 = x^2 + y^2$ فيثاغورس

بالتعويض عن قيمة x, y

$r^2 = r^2 \cos\Theta^2 + r^2 \sin\Theta^2$

$r^2 = r^2 (\cos\Theta^2 + \sin\Theta^2)$

$1 = \cos\Theta^2 + \sin\Theta^2$

وبقسمة طرفي المعادلة اعلاه على $\sin\Theta^2$

$1 / \sin\Theta^2 = \cos\Theta^2 / \sin\Theta^2 + \sin\Theta^2 / \sin\Theta^2$

$\csc\Theta^2 = \cot\Theta^2 + 1$

وبالقسمة على $\cos\Theta^2$

$\sec\Theta^2 = 1 + \tan\Theta^2$

<u>النسب المثلثية لمجموع او فرق بين زوايا</u>

1) $Sin(A+B) = SinA\ CosB + CosASinB$

2) $Sin(A-B) = SinA\ CosB - CosASinB$

3) $Cos(A+B) = CosA\ CosB - SinASinB$

4) $Cos(A- B) = CosA\ CosB + SinASinB$

5) $$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

6) $$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Ex)

جد قيمة Θ اذا كان

$Cos(60+\Theta) = 2\ Sin\Theta$

$Cos\ 60\ Cos\Theta - Sin60\ Sin\Theta = 2\ Sin\Theta$

$\frac{1}{2}\ Cos\Theta - 0.866\ Sin\Theta = 2\ Sin\Theta$

$\frac{1}{2}\ Cos\Theta = 2\ Sin\Theta + 0.866\ Sin\Theta$

$\frac{1}{2}\ Cos\Theta = 2.866\ Sin\Theta$

$\frac{1}{2} = 2.866\ tan\Theta$

$tan\Theta = 0.5 / 2.866 = 0.1747 \longrightarrow \Theta = 9°55'$

ملاحظة النسبة المثلثية لاي زاوية في مثلث قائم هي النسبة المتممة للزاوية المتممة لتلك الزاوية اي ان :

$Sin\Theta = Cos\ (90 - \Theta)$

$Sec\ (90 - \Theta) = Csc\Theta$

النسب المثلثية لمضاعفات الزوايا

1) $Sin2A = 2\ SinA\ CosAs\ 2A$

2) $Cos\ 2A = Cos^2 A - Sin^2 A$

$= 2\ Cos^2A - 1$

$= 1 - 2\ Sin^2 A$

$Cos^2 A = \frac{1}{2}\ (1 + Cos\ 2A)$

$Sin^2 A = ½ (1 – Cos 2A)$

$$tan^2 A = \frac{1 - Cos\, 2A}{1 + Cos\, 2A}$$

$$tan\, 2A = \frac{2\, tan\, A}{1 - tan^2 A}$$

Ex)

جد قيمة $Cos\, 3Θ$ بدلالة $Cos\, Θ$

$Cos\, 3Θ = Cos\, (2Θ + Θ)$

$= Cos\, 2Θ\, CosΘ - Sin2Θ\, SinΘ$

$= CosΘ(2Cos^2 Θ - 1) - SinΘ\, (2SinΘCosΘ)$

$= CosΘ(2Cos^2 Θ - 1 - 2\, Sin^2 Θ$

$= CosΘ\, (2Cos^2 Θ - 1 – 2(1-Cos^2 Θ)$

$= CosΘ(4\, Cos^2Θ - 3)$, $= 4\, Cos^3Θ – 3\, CosΘ$

الأسبوع السادس

الدالة الأسية والدالة اللوغارتمية ودوال القطع الزائد

الأسس واللوغارتمات

الأس: الأس هو العدد الذي يكتب فوق العامل ليدلنا على تكرار ذلك العامل. وعليه فأن قوانين الأسس التالية لا تنطبق الا على العوامل.

قوانين الأسس

1) عند ضرب العوامل المتشابهة تجمع الأسس $a^x . a^y = a^{x+y}$, $x^2 . x^3 = x^5$

$(a+b)^3(a+b)^4=(a+b)^7$

2) عند قسمة العوامل المتشابهة تطرح الأسس $a^x/a^y = a^{x-y}$

$x^4y^3/x^3y^2 = xy$

3) عند رفع العوامل الى قوة معينة تضرب اسس العوامل بتلك القوة.

$(a^x)^n = a^{nx} = (a^n)^x$

$(x^2y^4)^3 = x^6y^{12}$

4) عند جذر العوامل فان الأسس تقسم على دليل الجذر ويمكن كتابة دليل الجذر على شكل كسر

$\sqrt{a^2b^6} = ab^3$, $\sqrt{x^2y^6} = xy^3$

5) الأس السالب يمكن قلب العامل وجعله موجب $a^{-x} = 1/a^x$

لا تطبق هذه القوانين على الحدود مثل $\sqrt{x^2+y^2}$, اي ان المقدار الجبري المحصور بين قوسين او يفصل بينه وبين مقدار آخر خط كسر او تحت الجذر يعتبر عامل واحد مكون من عدة حدود .

اللوغاريتم:

اللوغاريتم يسهل العمليات الحسابية المعقدة ولا يمكن استخدامها الا على العوامل الجبرية فقط .

ملاحظة : يوجد نوعان من اللوغارتم

1) التي اساسها 10 تسمى اللوغارتمات الاعتيادية $\log_{10} x = \log x$

2) اذا كان اساس اللوغارتيم e فان اللوغارتيم يسمى اللوغارتيم الطبيعي ويستعمل بصورة خاصة في التفاضل والتكامل ويرمز لها ln . $\log_e x = \ln x$

حيث e عدد حقيقي يقع بين 2,3 وقيمته التقريبية ----2.71828 ويعرف على انه غاية

$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+ 1/n\right)^n$

في حل هذه الغاية وباستخدام النظريات الرياضية ينتج ان $e \approx 2.718$

من الجداول $\log_{10} e = 0.4343$

$$\mathrm{Log}_e 10 = \frac{1}{\mathrm{Log}_{10} e} = \frac{1}{0.4343} = 2.3026$$

الدالة الأسية والدالة اللوغارتمية ودوال القطع الزائد

الدالة الأسية $y= a^x$, $y=f(x)$ حيث a موجب $8=2^3$.

الدالة اللوغارتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية,

$y = a^x$

$x = a^y$

حيث يسمى الأس او القوة (y) التي يرفع اليها العدد (a) ليكون الناتج

(x) بلوغاريتم x للأساس a وكما يلي

$y = \log_a x$

$9 = 3^2$

$a \neq 1 , a>0 , x>0$

اي يسمى لوغاريتم الناتج x للأساس a = الأس y .

$2 = \log_3 9$

$2^5 = 32 , \quad \log_2 32 = 5$

Ex) $x = \log_2 8$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

Ex) $-4 = \log_a (1/32)$

$a^{-4} = 1/32$

$1/a^4 = 1/32$

$a^4 = 32 = 2^4 . 2$

$a = 2^4\sqrt{2}$

بعض قوانين اللوغارتيمات :

1) لوغارتيم حاصل ضرب دالتين يساوي مجموع اللوغارتيم لكل دالة

1) $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^n = n \log_a x = (a^x)^n = a^{nx}$

4) $\log_a {}^n\sqrt{x} = 1/n \log_a x$

وبالعكس $\mathrm{Log}_{10}\, e = \dfrac{1}{\mathrm{Log}_e 10}$

5) $\log_a x =(\log_b x) (\log_a b)$

يمكن تحويل لوغاريتم اي عدد من اساس معين الى اساس آخر.

اي ان لوغاريتم مقدار لاساس جديد يساوي لوغاريتم المقدار للاساس القديم مضروب في لوغاريتم الاساس القديم بالنسبة للاساس الجديد.

$\log_b x = c$ نفرض
$X = b^c$
$\text{Log}_a x = \log_a b^c = c\log_a b = \log_b x . \log_a b$

$10^0 = 1$
$\text{Log}10 = 1$
$\text{Log } 1 = 0$
$\text{Log}_a\ a = 1$
لا يوجد Log(-)

Ex) $\log(x+4) = 2$ جد قيمة x
$(x+4) = 10^2$
$X+4 = 100 \longrightarrow x = 96$

Ex) $\log(4x+10) + \log(x-2) = 2\log(2x-1)$

$\text{Log}(4x+10)(x-2) = 2\log(2x-1)$
$(4x+10)(x-2) = (2x-1)^2$
$4x^2 - 8x + 10x - 20 = 4x^2 - 4x + 1$
$6x - 21 = 0 \longrightarrow x = 3.5$

Ex) $\log 64 - 3\log 2 - 2\log 4 = \log 1/2$
$\text{Log}64 - \log 2^3 - \log 4^2 =$
$\text{Log}64/8 - \log 16 = \log 8/16 = \log \frac{1}{2}$

قوانين اخرى , للتحويل من دالة لوغارتمية الى دالة اسية :
$y=\log_a x$, $y= a^x$ $(a>0 \ , a\neq 1)$
1) $\log_a(a^x) = x$ (for all x)

2) $a^{(\log_a x)} = x$ (for x >0) $y=\log_a x \longrightarrow a^y = x$

Ex) $\log_2(2^5) = 5$
$\text{Log}(10^{-7}) = -7$

$2^{(\text{LOG}_2 3)} = 3$, $10^{(\log_{10} 4)} = 4$

قوانين اللوغاريتم الطبيعي :

1) $\ln xy = \ln x + \ln y$

2) $\ln x/y = \ln x - \ln y$
3) $\ln x^n = n \ln x$
4) $\ln \sqrt[m]{x} = 1/m \ln x$
5) $\ln 1/x = - \ln x$
6) $\log_a x = \ln x / \ln a$

البرهان $a^{(\log_a x)} = x$
$\ln a^{(\log_a x)} = \ln x$
$\log_a x \ln a = \ln x$
$\log_a x = \ln x / \ln a$

Ex)1) $\ln\sqrt{\cos x} = ½ \ln \cos x$
$\ln\sqrt[3]{x+1} = 1/3 \ln(x+1)$ (9

<u>قوانين الدالة الأسية الطبيعية e^x</u>
الدالة السية الطبيعية e^x عكس دالة اللوغارتيم الطبيعي $\ln x$

$y = e^x$
$x = e^y$
$y = \log_e x = \ln x$

1) $e^{x1} . E^{x2} = e^{x1+x2}$
2) $e^{-x} = 1/ e^x$
3) $e^{x1}/ e^{x2} = e^{x1-x2}$
4) $\ln(e^x) = x \ln e = x$
5) $e^{\ln x} = x$
لان $y=\ln x$
نحولها الى اسية $e^y = x$

6) $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$

Ex) 1) $e^{x+ \ln 2} = e^x . e^{\ln 2} = 2e^x$
2) $e^{- \ln x} = 1 / e^{\ln x} = 1/ x$
3) $e^{2x} / e = e^{2x - 1}$
4) $2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2}$
5) $e^{\pi \ln 2} = 2^{\pi}$
6) $\ln e^2 = 2$
7) $\ln e^{-1} = -1$
8) $e^{\ln 2} = 2$
9) $e^{3 \ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 2^3 = 8$

Ex) $\log 2 = \ln 2 / \ln 10 = 0.69 / 2.3 = 0.3$

Ex) Find y if $\ln y = 3t + 5$

$y = e^{3t+5}$

Ex) find k $e^{2k} = 10$

$2k = \log_e 10$

$2k = \ln 10$

$k = \frac{1}{2} \ln 10$

Ex) $e^{\ln(x^2 - 2x + 1)} = e^0$

$x^2 - 2x + 1 = 1$

$x^2 - 2x = 0$, $x(x - 2) = 0$, $x = 0$, $x = 2$

Ex) $$y^{2/3} = \frac{(x^2+1)(3x+4)^{1/2}}{\sqrt[5]{(2x-3)(x^2-4)}}$$

$$\ln y^{2/3} = \ln \frac{(x^2+1)(3x+4)^{1/2}}{\sqrt[5]{(2x-3)(x^2-4)}}$$

$\ln y^{2/3} = \ln(x^2+1) + 1/2 \ln(3x+4) - 1/5 \ln(2x-3)(x^2-4)$

$2/3 \ln y = \ln(x^2+1) + 1/2 \ln(3x+4) - 1/5 \ln(2x-3) - 1/5 \ln(x^2-4)$

ثم نشتق

دوال القطع الزائد وهو نوع من القطوع المخروطية والمتمثل وجودها في الكون والطبيعة في سير الكواكب والنجوم .... اذا قطع المستوي جزئي مخروط , كان المنحني الناتج هو القطع الزائد

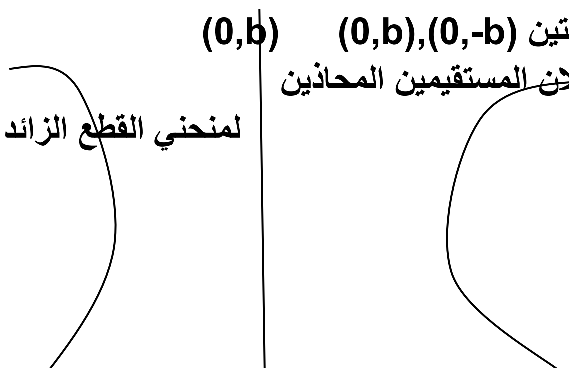
تعريف القطع الزائد هو مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي عددا ثابتا

معادلة القطع الزائد , حيث 2a = طول المحور الحقيقي, 2b =طول المحور المرافق او القطبي . , (a,0) (-a,0) رأسي القطع الزائد . (0,b),(0,-b) قطبي القطع . (c,0),(-c,0) بؤرتي القطع الزائد.

1) اذا كانت البؤرتان على المحور x , حيث $a^2+b^2=c^2$ $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

2) اذا كانت البؤرتان على المحور y , $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$

لرسم القطع الزائد: نعين النقطتين (a,0),(-a,0) والنقطتين (0,b),(0,-b) (0,b)
نكون مستطيل قائم , ثم نرسم قطري المستطيل فهما يمثلان المستقيمين المحاذين لمنحني القطع الزائد



$(c,0),(-c,0)$نعين البؤرتين, ثم نرسم ذراعي القطع الزائد.

$(-a,0)$ $(a,0)$

$(-c,0)$ $(c,0)$

$(0,-b)$

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على المحور السيني اذا كان Ex)

$2a = 10 \quad , 2b = 8$

$a=5 \quad , b=4$

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

$x^2/25 - y^2/16 = 1$

Ex):عين البؤرتان والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمحور المرافق للقطع الزائد التالي

$x^2/9 - y^2/4 = 1$

$a=3 \quad , \quad b=2$

طول المحور الحقيقي $= 2a = 6$

طول المحور المرافق (التخيلي) $= 2b = 4$

الرأسان $(3,0)(-3,0)$

$a^2 + b^2 = c^2$

$c^2 = 9+4 = 13$

البؤرتان $(\sqrt{13},0)(-\sqrt{13},0)$

H.w) 1) عين البؤرتين والرأسين والقطبين وطول كل من المحورين الحقيقي والقطبي للقطع ثم ارسمه الزائد التالي $x^2/64 - y^2/36 = 1$

2) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره القطبي 4 وحدات وبؤرتاه هما النقطتان $F_1(0,\sqrt{8})$, $F_2(0,-\sqrt{8})$

الأسبوع السابع

الغايات Limits

الغايات Limits

غايات الدوال الجبرية:

دالة $y=f(x)$

$F(x)= 3x - 4$

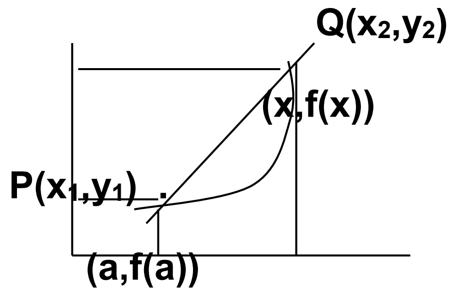
عندما x تقترب من 3 وليس بالضرورة تساويها ,

$x= 2.9 , 2.99 , 3.00 , 3.01$

فان $f(x)= 3x - 4= 4.7 , 4.97 , 4.997 , 5.00 , 5.03$

مفهوم الغاية هندسيا

منحني الدالة $y=f(x)$



المستقيم QP يقطع المنحني في نقطتين P,Q

$$\text{القاطع} \; m= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{F(x) - f(a)}{x - a}$$

كلما تقترب Q من P يقترب الخط القاطع من المماس للمنحني عند النقطة P الى أن تنطبق Q على P فأن المستقيم يصبح المماس للمنحني وان الميل يصبح ميل المماس أي أن :

$$\text{المماس للمنحني} \; m= \lim_{Q\to P} m_{QP} = \lim_{x\to a} \frac{F(x) - f(a)}{x - a}$$

Ex1) $y=x^3$ للحصول على ميل المماس لهذا المنحني عند النقطة P (2,8)

$$M_{QP} = \lim_{x\to a} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{x\to a} \frac{F(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{عندما} \; x =2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x -2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x -2} =4+4+4 =12$$

هناك كميات غير محددة القيم , منها 0/0 , كمية/ 0 = ∞ , ∞/∞ , ∞ ± ∞ = ∞ , ∞/ 0 . حيث لا يمكننا مباشرة الحصول على قيمها لذا يجب التخلص من مشكلتها أما

1) بالتحليل
2) القسمة على اكبر اس في الدالة
3) الضرب والقسمة في المرافق (عكس الأشارة)
4) مشتقة الدالة

Ex2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 -4}{2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{} = \lim_{x\to 2} x+2 =4$

Ex3) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x +1}{x -1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x -1)^2}{x -1} \; x -2 = \lim_{x\to 1} x - 1= 0$

Ex4) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x + 2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2x3}{x3} - \frac{3x2}{x3} + \frac{x}{x3} - \frac{1}{x3}}{\frac{x3}{x3} - \frac{2x2}{x3} + \frac{2x}{x3} + \frac{2}{x3}}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x2} - \frac{1}{x3}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x2} + \frac{2}{x3}} = \dfrac{2 - \frac{3}{\infty} + \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{2}{\infty} + \frac{2}{\infty}} = \dfrac{2 - 0 + 0 - 0}{1 - 0 + 0 + 0} = 2$

Ex5) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 2x^2 - x - 5}{5x^3 - 4x^2 - 3x - 9} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3x3}{x3} - \frac{2x2}{x3} + \frac{x}{x3} - \frac{5}{x3}}{\frac{3x3}{x3} - \frac{4x2}{x3} + \frac{3x}{x3} - \frac{9}{x3}}$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x2} - \frac{5}{x3}}{5 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x2} - \frac{9}{x3}} = 3/5$

H.w) 1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x + 1}{x - 3}$ $= 2$

2) $\lim_{x\to 2} (\frac{1}{2} x + 5)$ $=6$

3) $\lim_{x\to 1} (4x^3 + 5x - 2)$ $=7$

4) $\lim_{x\to 2} \dfrac{5x^3 - 16x}{2x + 14}$ $= 1$

5) $\lim_{x\to -2} \dfrac{X^5 + 32}{x^3+8}$

بعض نظريات الغايات

1) اذا كانت $f(x) = mx + b$ حيث b , m اعداد حقيقية فأن $\lim_{x\to a} (mx=b) = ma+b$

2) اذا كان $f(x)$ يساوي مقدار ثابت $f(x) = k$ فان الغاية تساوي نفس المقدار الثابت

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k$, $\lim_{x\to 5}(6) = 6$

3) نهاية حاصل الجمع لدالتين او اكثر عندما $x\to a$ يساوي حاصل الجمع الجبري لنهايتي الدالتين.

$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

4) نهاية حاصل ضرب دالتين عندما $x\to a$ تساوي حاصل ضرب نهايتي الدالتين .

$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \,.\, \lim_{x\to a} g(x)$

5) اذا كان دالتين أحدهما مقدار ثابت كالآتي $\lim_{x\to a} k\, g(x) = k \lim_{x\to a} g(x)$

6) اذا تساوت عدة دوال مضروبة $\lim_{x\to a} x^n = (\lim_{x\to a} x)^n$

7) نهاية خارج قسمة دالتين تساوي خارج قسمة نهاية كل من الدالتين عندما $x\to a$

$\lim_{x\to a} f(x)/ g(x) = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x)$

8) كذلك فان $\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim g(x)}$

$\lim_{x\to 3} (x+2)^{(x+1)} = (3+2)^{(3+1)} = 5^4$

Ex1) $\lim_{x\to 2} [1/x + (x+2)] = \lim_{x\to 2} 1/x + \lim_{x\to 2} (x+2) = 1/2 + 4 = 4½$

Ex2) $\lim_{x\to 2} [(x^2 - x) \sqrt{4x + 1}]$

$= \lim_{x\to 2} (x^2 - x) \,.\, \lim_{x\to 2} \sqrt{4x + 1}$

$= [\lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} x] [\lim_{x\to 2} \sqrt{4x +1}] = (2^2 - 2) \sqrt{4*2 +1} = 2\sqrt{9} = 6$

$\lim_{x\to a} \dfrac{X^n + a^n}{X + a} = n\, a^{n-1}$ (9

Ex) $\lim_{x\to 3} \dfrac{X^3 - 27}{X - 3} = 3(3)^{3-1} = 3(3)^2 = 27$

Ex) $\lim_{x\to -3} \dfrac{X^2 - 9}{X+ 3} = 2(-3) = - 6$

Ex) $\lim_{x\to -2} \dfrac{X^5 + 32}{X^3 +8} = \lim_{x\to -2} \dfrac{X^5 + 2^5}{X + 2} \,.\, \dfrac{X + 2}{X^3 + 2^3}$

$\lim_{x\to -2} \dfrac{X^5 + 2^5}{X + 2} \lim_{x\to -2} \dfrac{X + 2}{X^3 + 2^3} = 5(-2)^{5-1} \dfrac{1}{3(-2)^{3-1}} = 5(-2)^4 \dfrac{1}{3(-2)^2} = 5/3\ (-2)$

Ex) $\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 -1})$

$= \lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2 -1} \,.\, \dfrac{x+\sqrt{x^2 -1}}{x+\sqrt{x^2 -1}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - (x^2 -1)}{x+\sqrt{x^2 -1}}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2 -1}} = 0$

Hw) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 + 4x - 9}{3x^2 - 3x + 7}$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x + 1}{x}$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x}$

$\lim_{x\to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

$\lim_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 3$

قوانين غايات بعض الدوال الخاصة (الدوال المثلثية):

Θ in radius , $\pi^r \times 1^r = 180^\circ \times 1^\circ$, $1^\circ = 180^\circ/\pi$

$\lim_{\Theta\to 0} \sin\Theta = 0$

$\lim_{\Theta\to 0} \cos\Theta = 1$

$\lim_{\Theta\to 0} \dfrac{\sin\Theta}{\Theta} = 1$, $\lim_{\Theta\to 0} \dfrac{\sin 3\Theta}{\Theta} = 3$

Ex1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$

Ex2) $\lim_{x\to 0} \tan x = \lim_{x\to 0} x \dfrac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 0 \times 1 = 0$

Ex3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2(x/2)}{x^2}$

$= 2 \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x/2}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x/2}{x} = 2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/2$

Cos4x – Cos2x Sin(3x)Sinx

Ex4) $\lim_{x\to 0} \frac{\quad}{\quad} = \lim_{x\to 0} -2 \frac{\quad}{x^2}$

$$= -2 \lim_{x\to 0} \frac{\text{Sin}(3x)}{x}^{2} \cdot \frac{\text{Sin}x}{x} = -2 \cdot 3 \cdot 1 = -6$$

Ex5) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{Sec}4x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{Cos}4x(\text{Sec}4x-1)}{\text{Cos}(4x) \cdot x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\text{Cos}4x}{\text{Cos}(4x) \cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\text{Cos}4x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\text{Sin}^2 2x}{x^2}$$

$=2.1.(2)^2 = 8$

الأسبوع الثامن

<u>Sequence, Series المتواليات</u>

المتواليات Sequence, Series

يمكن تكوين متوالية من معرفة حدها الأول والعلاقة التي تربط حدودها ببعضها . مثل المتوالية ---1,2,3,4, -- حيث ان كل حد ناتج من اضافة 1 الى الحد السابق له .

كل حد مربع موقعه في التسلسل -----1,4,9,16, اي ان الحد النوني n^2 .

من السهولة معرفة او تمييز هذه المتوالية --------2,5,10,17,26, لذلك يمكن كتابتها على شكل $(1+1),(1+4),(1+9),(1+16),(1+25),\text{-----------}(1+n^2)$

<u>المتوالية العددية</u> وهي ابسط انواع المتواليات , الحد الأول يطلق (a) والعلاقة التي تربط الحدود هي , كل حد يزيد عن الحد السابق له بمقدار ثابت يسمى اساس المتوالية .

اساس المتوالية يرمز له (d) تصبح المتوالية العددية ---------a,a+d,a+2d,a+3d,a+4d, او بطرح الأساس او الأساس (-d) ------ a, a-d, a-2d, a-3d, .

يمكن ان نستنتج ان الحد الثالث يساوي $a+2d = a+(3-1)d$

اي ان الحد النوني يساوي $a+(n-1)d$

اذن المتوالية عدد حدودها (n) وحدها الأول (a) واساسها (d) .

مجموع المتوالية هو (S) $S = a + a+d + a+2d + \text{--------} + [a+(n-1)d]$

مع جمعها بعكس المتوالية $S = [a+(n-1)d] + \text{--------------} + a+d + a$

ناتج الجمع $2S = n[2a+(n-1)d]$

$$S = n/2\,[2a+(n-1)d]$$

او الحد النوني = الحد الأخير = L , $L = a+(n-1)d$

$$S = n/2\,(a+L)$$

Ex1) ما هو عدد حدود المتوالية العددية التي حدها الأول (1-) واساسها (2) وحدها الأخير (11) .

$L = a+(n-1)d$

$11 = -1+(n-1)2 \longrightarrow 11 = -1+2n-2 \longrightarrow 14 = 2n \longrightarrow n = 7$

Ex2) ما هو مجموع حدود المتوالية في المثال السابق

$S = n/2 (a + L)$

$= 7/2 (-1 + 11) = 35$

Ex3) جد مجموع اول 50 عدد فردي

$a = 1 , d = 2 , n = 50$

$S = 50/2 [2 + (49 * 2)] = 25 * 100 = 2500$

Ex4) ما هو عدد حدود المتوالية العددية التي حدها الرابع 11 وحدها التاسع 21 ومجموع حدودها 140

$L4 = 11 , La = 21 , S = 140 , n ?$

$L = a + (n-1) d$

$21 = a + 8 d$

$11 = a + 3 d$

بطرح المعادلتين

$10 = 5 d \longrightarrow d = 2$

$11 = a + 3 * 2 \longrightarrow a = 5$

$S = n/2 [2a + (n-1) d]$

$140 = n/2 [2 * 5 + (n-1) 2]$

$140 = n/2 [8 + 2n]$

$140 = 4n + n^2$

$n^2 + 4 n – 140 = 0$

$(n + 14) (n – 10) = 0 \longrightarrow n = - 14$ لا يجوز

<u>الوسط الحسابي</u> هو المعدل بين كميتين مثل 20 وسط بين (10 و 30) .

<u>المتوالية الهندسية</u> : كل حد يتكون من ضرب الحد السابق في عدد ثابت وهو الأساس (r)

$a , ar , ar^2 , ar^3 , --------, ar^{n-1}$

الحد النوني هو $a r^{n-1}$, والحد الأخير L , $L = a r^{n-1}$

مجموع الحدود نفسها في العددية ما عدا ضرب التسلسل في الأساس r .

$S = a + a\,r + a\,r^2 + \text{-------} + a\,r^{n-1}$

اذن $S = \dfrac{a(1- r^n)}{1- r}$ if $r < 1$

Or $S = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ if $r > 1$

جد مجموع حدود المتسلسلة $1 + ½ + ¼ + 1/8 +$ ----- الى 10 حدود

Ex1)

$a = 1$, $r = 1/2 < 1$, $n = 10$

$$S = \frac{a(1- r^n)}{1- r} = \frac{1(1- ½^{10})}{1- 1/2} = 2\ (1 – 1/1024) = 1\ \ 511/512$$

Ex2) جدمجموع المتسلسلة $1 + 3 + 9 + 27$ --------- الى 8 حدود

$a = 1$, $r = 3$, $n = 8$

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1(3^8 - 1)}{3 - 1} = ½\ (6561 – 1) = 3280$$

الوسط الهندسي

الوسط الهندسي بين العددين 4 , 9 هو $\sqrt{36} = 6$. اي ان (x)هو الوسط بين (a,b)

$x^2 = ab$

بينما الوسط الحسابي هو $9+4\ /2 = 6.5$

$x = \sqrt{ab} = 6$

Ex) اوجد متوالية هندسية في 10 حدود يكون فيها الحد الول 2 والحد العاشر 1024 .

$L_{10} = a\,r^9$

$1024 = 2\,r^9$

$r^9 = 512 = 2^9$

$r = 2$, 2 ,4, 8 ,16, 32, 64, 128, 256, 512

Ex) متوالية هندسية متكونة من 10 حدود , حدها الرابع 16 وحدها السابع 128 . جد اساسها وحدها الأول ومجموع حدودها .

$128 = a\, r^6$

$16 = a\, r^3$

وبقسمة المعادلتين

$128/16 = a\, r^6 / a\, r^3$

$8 = r^3 \longrightarrow r = 2$

$16 = a * 2^3 = 8\, a \longrightarrow a = 2$

$r > 1 \longrightarrow \quad S = \dfrac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2 * 1023 = 2046$

الأسبوع التاسع

التفاضل , المشتقة ,مشتقة الدوال الجبرية , قاعدة السلسلة

التفاضل , المشتقة ,مشتقة الدوال الجبرية , قاعدة السلسلة

التفاضل تفاضل y هو dy , تفاضل x هو dx . اما مشتقة y نسبة الى x هو dy/dx .اي ان المشتقة هي ان نشتق نسبة الى متغير ثاني اما التفاضل لا يحتاج الى متغير ثان نشتق بالنسبة اليه .

مشتقة الدالة وهي معدل التغير للدالة , وهي الغاية لميل المماس للمنحني . ففي كل نقطة x للدالة f(x) التي يمكن الحصول فيها على غاية lim فان الدالة يقال بان لها مشتقة اي انها قابلة للاشتقاق وان dy/dx يسمى مشتقة الدالة f(x) في النقطة x .

مشتقة الدوال الجبرية ,(الدوال المستمرة) وقاعدة السلسلة

قوانين المشتقة

1) مشتقة الدالة الثابتة = صفر

$y = a$

$dy/dx = 0$

1) مشتقة x^n بالنسبة الى x حيث $n \neq 0$ يساوي $n\,x^{n-1}$.

$y = x^n$

$dy/dx = n\,x^{n-1}$

2) مشتقة ثابت × دالة = الثابت × مشتقة الدالة .

$y = a\,f(x)$

$dy/dx = a\,f'(x)$

$y = 3\,x^2$

$y' = 3(2x) = 6x$

3) مشتقة حاصل ضرب دالتين = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

$y = f(x)\,g(x)$

$dy/dx = f(x)\,dg(x)/dx + g(x)\,df(x)/dx$

Ex) $y = (x^2+3)(x-4)$

$dy/dx = (x^2+3)(1) + (x-4)(2x)$

$= x^2 + 3 + 2x^2 - 8x = 3x^2 - 8x + 3$

4) مشتقة قسمة دالتين = المقام ×مشتقة البسط – البسط × مشتقة المقام / المقام ^{2}

$$y = \frac{x^3+1}{x-1}$$

$$dy/dx = \frac{(x-1)(3x^2) - (x^3+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

5) اذا كان $y = Q^n$ حيث Q دالة ل x فان $dy/dx = n\,Q^{n-1}\,dQ/dx$

Ex) $y = (x^2 - 2x + 3)^{15}$

$y' = 15\,(x^2 - 2x + 3)^{14}\,(2x - 2)$

$= 30\,(x-1)(x^2 - 2x + 3)^{14}$

7) مشتقة مجموع عدد من الدوال = مجموع مشتقاتها

$d\,(f(x) \pm g(x) \pm ----)\,/\,dx = d\,f(x)/dx \pm d\,g(x)/dx \pm ------$

Ex) $y = 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$y' = 12x^3 + 15x^2 + 6x + 2 + 0$

Hw) 1) $y = 10\sqrt{x} + 5/x + 8/x^2$

$y = 3\sqrt[3]{x} + 4/\sqrt[4]{x}$

<u>قاعدة السلسلة</u> : اذا كانت y دالة الى t , وكانت t دالة الى x فان :

$Dy/dx = dy/dt \,.\, dt/dx$

Ex) $y = t^2 + 2$, $t = x^2 + 1$

$Dy/dt = 2t$, $dt/dx = 2x$

$dy/dx = dy/dt \,.\, dt/dx$

$= 2t \,.\, 2x$

$4\,tx = 4(x^2+1)\,x \rightarrow = 4x^3 + 4x$

Ex) $y = t^3 - 3t^2 + 5t - 4$, $t = x^2 + x$

$dy/dt = 3t^2 - 6t + 5$, $dt/dx = 2x + 1$

$dy/dx = (3t^2 - 6t + 5).(2x+1)$

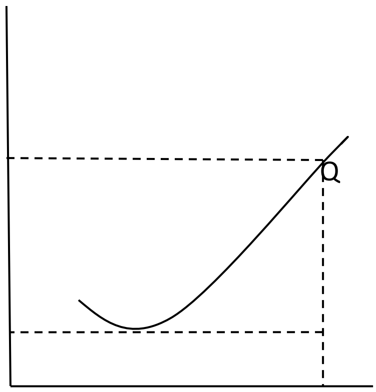
$= [\,3(x^2 + x)^2 - 6(x^2 + x) + 5\,]\,.\,(2x + 1)$

Homework) $y = 1 - t^2$, $x = t/t+1$ جد dy/dx

الأسبوع العاشر

الدوال المنحنية , الدالة القياسية المشتقة ذات المراتب العليا

الدوال المنحنية , الدالة القياسية المشتقة ذات المراتب العليا



p

عرفنا سابقا ايجاد ميل المنحني للدالة $y = f(x)$

لتكن $p(x_1,y_1)$ نقطة على المنحني

نقطة اخرى للمنحني $Q(x_1+\Delta x , y_1+\Delta y)$

باضافة Δx للطرفين نحصل

$$y_1 + \Delta y = f(x_1 + \Delta x)$$

$$y_1 = f(x_1)$$

بالطرح

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

وان ميل القاطع **Pq** هو

$$m = \Delta y / \Delta x = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

وعند ثبوت النقطة **p** وتحرك **Q** باتجاه **p** فان Δx تصغروتقترب من الصفر وبهذا فان الميل للنقطة **p** يقترب من كمية ثابتة هي غايته . وتسمى ميل المماس للمنحني في النقطة **p**

$$m = \lim_{Q \to p} m = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

هذه النتيجة لها علاقة مباشرة بالدالة فيمكن ان تكتب على شكل $f'(x_1)$ او dy/dx وان x_1 قيمة ثابتة

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

هذه الغاية قد توجد لبعض قيم **x** ولا توجد لبعض القيم الأخرى . وعليه ففي كل نقطة x_1 التي يمكن الحصول فيها على غاية **lim** فان الدالة $f(x)$ يقال بان لها مشتقة اي انها قابلة للاشتقاق وان $f'(x)$ او dy/dx يسمى مشتقة الدالة **x** في النقطة x_1 .

$$f'(x_1) = dy/dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

نرمز للمشتقة الأولى $f'(x) = y' = dy/dx$

الدالة القياسية $y = f(x)$

ان توفرت فيها شروط الاشتقاق فان مشتقتها الاولى $y' = f'(x) = dy/dx$

والمشتقة الثانية لها $y'' = f''(x) = d^2y/dx^2$

والمشتقة الثالثة $y''' = f'''(x) = d^3y/dx3$

وهكذا $y^n = f^n(x) = d^ny/dx^n$

الأزاحة هي دالة للزمن مثلا $S = f(t)$

وهي السرعة $f'(t) = ds/dt$

تمثل التعجيل $f''(t) = d^2s/dt^2$

امشتقة الثالثة للازاحة تمثل المعدل اللحظي لتغير التعجيل $f'''(t) = d^3s/dt^2$

Homework) اذا كان $y = \cos 2x$, اوجد d^4y/dx^4

اذا علمت ان $y^2 + x^2 = 1$ فبرهن ان $y\, d^2y/dx^2 + (dy/dx)^2 + 1 = 0$

الأسبوع الحادي عشر

مشتقة الدوال المثلثية , مشتقة الدوال الزائدية

مشتقة الدوال المثلثية , مشتقة الدوال الزائدية

$y = Sin\Theta$

$dy/dx = Cos\Theta \, d\Theta / dx$

$y = 5 \, Sin(3x^2)$

$dy/dx = 5 \, Cos \, 3x^2 \, (6x)$

$y = Cos\Theta$

$dy/dx = - Sin\Theta \, d\Theta/dx$

$y = Cos^2 x$

$dy/dx = 2 \, Cosx \, (- Sinx) = - Sin2x$

$y = tan\Theta$

$dy/dx = Sec^2\Theta \, d\Theta/dx$

$y = Cot\Theta$

$dy/dx = - Csc^2 \, \Theta \, d\Theta/dx$

$y = Sec\Theta$

$dy/dx = Sec\Theta \, tan\Theta \, d\Theta/dx$

$y = Csc\Theta$

$dy/dx = - Csc\Theta \, Cot\Theta \, d\Theta/dx$

Ex)

1) $y = Sin(x^2 + x)^2$

$dy/dx = Cos(x^2+x) \, 2(x^2 + x)(2x+1)$

2) $y = Cosx^2$

$dy/dx = - Sinx^2 \, (2x) = - 2x \, Sinx^2$

3) $y = tan(Sinx)$

$dy/dx = Sec^2(Sinx) \, Cosx$

4) $y = Cot^2\, 3x$

$dy/dx = 2\, Cot\, 3x\, (-\, Csc^2\, 3x)\, 3 = -6\, Cot3x\, Csc3x$

<u>الدوال الزائدية</u>

هذه الدوال مرتبطة ارتباطا وثيقا بالدالة الأسية e^x . ولهذه المجموعة من الدوال تطبيقات واسعة في حلول المعادلات التفاضلية . وتتشابه هذه الدوال مع الدوال المثلثية ولها اسماء مشابهة .

Sinh, Cosh, tanh, sech, cosech, coth

الجيب الزائدي $\quad Sinh\, x = ½\, (e^x - e^{-x})$

جيب التمام الزائدي $\quad cosh\, x = ½\, (e^x + e^{-x})$

<u>مشتقة الدوال الزائدية</u>

$Sinh\, x = ½\, (e^x - e^{-x})$

$d\, sinh\, x\, /dx = ½\, (e^x + e^{-x}) = cosh\, x$

$d\, sinh\, x = cosh\, x\, dx$

$Cosh\, x = ½\, (e^x + e^{-x})$

$d/dx\, cosh\, x = ½\, (e^x - e^{-x}) = sinh\, x$

$d\, cosh\, x = sinh\, x\, dx$

Ex) $y = sinh\, 3x$

$Dy/dx = cosh\, 3x\, .3 = 3\, cosh\, 3x$

Homework :

$y = cosh\, (2x + 1)$

الأسبوع الثاني عشر

مشتقة الدالة الأسية , مشتقة الدالة اللوغارتمية

مشتقة الدالة الأسية , مشتقة الدالة اللوغارتمية

مشتقة الدالة الاسية (الطبيعية) e^x

$y = e^x$ مشتقة الدالة الأسية الطبيعية e^x = نفس الدالة × مشتقة الأس

$dy/dx = e^x$

if $y = e^u$, $dy/dx = e^u\ du/dx$

Ex) $y = e^{3x2}$, $y' = e^{3x2}\ .6x = 6x\ e^{3x2}$

$y = 4e^{\sin x}$, $y' = 4\ e^{\sin x} \cdot \cos x$

Hw) $y = e^{x2} \cdot \tan x^3$

مشتقة الدالة الأسية الأعتيادية a^x

$y = a^x = e^{x \ln a}$

$da^x/dx = d\ e^{x \ln a} / dx = e^{x \ln a}\ d\ x \ln a/dx$

$y' = a^x \ln a$

if $y = a^u$

$y' = a^u \ln a\ du/dx$

Ex) $y = 3^x$, $y' = 3^x \ln 3$

$y = 3^{\sin x}$

$y' = 3^{\sin x} \ln 3 \cos x$

مشتقة الدالة اللوغارتمية (الطبيعية) $\ln x$

$y = \ln x = \log_e x$

$x = e^y$ نحولها الى اسية

$dx/dy = e^y . dy/dy = x$ نشتق بالنسبة الى y

$dy/dx = 1/x$ نقلبها

If $y = \ln u$

$dy/dx = 1/u \ . \ du/dx$

Ex) $y = 5 \ln (x^2 +1)^3$

$y' = 5 \ . \ 1/ (x^2 +1)^3 \ . \ 3(x^2+1)^2 (2x) = 30x / (x^2+1)$

<u>**مشتقة الدالة اللوغارتمية الأعتيادية**</u>

$y = \log_a x$

$dy/dx = 1/x \ . \ 1/\ln a$

if $y = \log_a u$

$dy/dx = 1/u \ . \ 1/\ln a \ . \ du/dx$

Ex) $y = \log (x^2+x+1)$

$y' = 1/ (x^2 +x+1) \ . \ 1/\ln 10 \ . \ (2x+1)$

Hw) $y = \ln (\sec x + \tan x)$

$y = \ln (\sec x)$

$y = \ln \sqrt{\cos x}$

<u>**مشتقة الدالة الأسية x^x او الدالة التي تحتوي على قوى بشكل u^v**</u>

وكذلك a^x

$y = x^x$ find y'

$\ln y = \ln x^x = x \ln x$

$1/y \ . \ dy/dx = x \ . \ 1/x + \ln x = 1 + \ln x$

$dy/dx = y (1+\ln x) = (1+\ln x) x^x$

حل اخر لمشتقة a^x

$y = 3^{\sin x}$

$\ln y = \ln 3^{\sin x} = \sin x \ln 3$

$1/y \ dy/dx = \cos x \ln 3$, $dy/dx = y \cos x \ln 3 = 3^{\sin x} \cos x \ln 3$

الأسبوع الثالث عشر

تطبيقات المشتقة, معادلة المماس والعمود , السرعة والتعجيل

تطبيقات المشتقة, معادلة المماس والعمود , السرعة والتعجيل

Ex) ما هو ميل المنحني $y = x^3 - 6x + 2$ عندما يقطع محور الصادات .

$y = x^3 - 6x + 2$

عندما يقطع محور الصادات فان $x = 0$

$dy/dx = 3x^2 - 6$, $x = 0$, $dy/dx = -6$

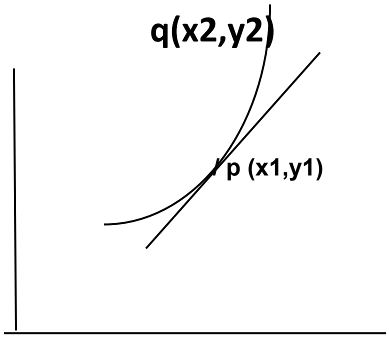
معادلة المماس والعمود:

معادلة الخط المستقيم

$$m = \frac{Y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

معادلة المماس للمنحني

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$



ميل العمود على مستقيم يساوي المقلوب السالب لميل المستقيم

Ex) جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (3-,5) ويكون عمودي على المستقيم $2x-3y=6$

$y = 2/3\ x - 2$

$m = 2/3$

ميل المستقيم المطلوب= $(-3/2)$

$y = -3/2\ x + b$

$5 = -3/2\,(-3) + b$, $b = 9.5$

$y = -3/2\ x + 9.5$

Homework) جد معادلة المماس والعمودي على المنحني للدالة $y= x^3 + 2x^2 + 5x + 20$ عند النقطة(1,6)

الجواب : معادلة المستقيم $y – 0= -5(x+1)$, معادلة العمودي $y-0= 1/5 (x+1)$

Hw) اكتب معادلة المماس والعمودي عليه للمنحني $x^3 +4xy – 3y^3 + 2$ عند النقطة (1,1)

السرعة والتعجيل

السرعة S لها علاقة بالمسافة D والزمن t , قانون الحركة , حيث ان المسافة والزمن من المقادير الفيزيائية الأساسية الممكن قياسها , والعلاقة تعطي الدالة التالية :

$D = f(t)$

سرعة الجسم هي معدل تغير المسافة في زمن ما $S = dD/dt$

والتعجيل هو معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن $A = dS/dt$

او المشتقة الثانية للمسافة $A= d^2D/dt^2$

المشتقة الثانية يعبر عنها y'' او d^2y/dx^2 حيث المشتقة الأولى dy/dx ومشتقة المشتقة الأولى هي المشتقة الثانية وكما يلي : $d (dy/dx) /dx = d\, dy/ (dx)^2 = d^2y / dx^2$

Ex) جسم يسير في خط منحني حسب العلاقة التالية $D= t^3 – 4t^2 – 3t$ اوجد التعجيل لهذا الجسم في اللحظة التي سرعته تصبح صفر .

$dD/dt = 3t^2 – 8t -3$

$dV/dt = 6t – 8$

عندما السرعة تسوي صفر $V = 3t^2 – 8t -3 = 0$

$(3t+1)(t-3)=0$

$t=- 1/3$, $t=3$

$A=dV/dt = 6t -8 = 6(- 1/3) -8 = - 10$

او $A= 6(3) – 8 = 10$

الأسبوع الربع عشر

الأسس واللوغارتمات

الأسس واللوغارتمات

الأس: الأس هو العدد الذي يكتب فوق العامل ليدلنا على تكرار ذلك العامل. وعليه فأن قوانين الأسس التالية لا تنطبق الا على العوامل.

قوانين الأسس

3) عند ضرب العوامل المتشابهة تجمع الأسس $a^x . a^y = a^{x+y}$, $x^2 . x^3 = x^5$

$(a+b)^3(a+b)^4=(a+b)^7$

4) عند قسمة العوامل المتشابهة تطرح الأسس $a^x/a^y = a^{x-y}$

$x^4y^3/x^3y^2 = xy$

3) عند رفع العوامل الى قوة معينة تضرب اسس العوامل بتلك القوة.

$(a^x)^n = a^{nx} = (a^n)^x$

$(x^2y^4)^3 = x^6y^{12}$

4) عند جذر العوامل فان الأسس تقسم على دليل الجذر ويمكن كتابة دليل الجذر على شكل كسر

$\sqrt{a^2b^6} = ab^3$, $\sqrt{x^2y^6} = xy^3$

5) الأس السالب يمكن قلب العامل وجعله موجب $a^{-x} = 1/ a^x$

لا تطبق هذه القوانين على الحدود مثل $\sqrt{x^2+y^2}$, اي ان المقدار الجبري المحصور بين قوسين او يفصل بينه وبين مقدار آخر خط كسر او تحت الجذر يعتبر عامل واحد مكون من عدة حدود .

اللوغاريتم:

اللوغاريتم يسهل العمليات الحسابية المعقدة ولا يمكن استخدامها الا على العوامل الجبرية فقط .

ملاحظة : يوجد نوعان من اللوغارتم

3) التي اساسها 10 تسمى اللوغارتمات الاعتيادية $\log_{10} x = \log x$

4) اذا كان اساس اللوغارتيم e فان اللوغارتيم يسمى اللوغارتيم الطبيعي ويستعمل بصورة خاصة في التفاضل والتكامل ويرمز لها ln . $\log_e x = \ln x$

حيث e عدد حقيقي يقع بين 2,3 وقيمته التقريبية ----2.71828 ويعرف على انه غاية

$e = \lim_{n\to\infty} (1+ 1/n)^n$

في حل هذه الغاية وباستخدام النظريات الرياضية ينتج ان $e \approx 2.718$

من الجداول $\log_{10} e = 0.4343$

$$\mathrm{Log}_e\, 10 = \frac{1}{\mathrm{Log}_{10} e} = \frac{1}{0.4343} = 2.3026$$

الأسبوع الخامس عشر

تطبيقات فيزياوية وهندسية عامة , رسم الدوال

تطبيقات فيزياوية وهندسية عامة , رسم الدوال

قيم اكبر ما يمكن واصغر ما يمكن

عندما توجد عبارة اكبرما يمكن او اصغرما يمكن , فان المشتقة الأولى تساوي صفر . اي نقاط حرجة عندها.

اولا, يجب التعبير عن الدالة كدالة لمتغير واحد مثل $y=f(x)$

ثم البحث عن قيم x التي تجعل y اكبر او اقل ما يمكن وذلك بجعل المشتقة الأولى =صفر.

Ex) عددان عند اضافة احدهما الى ثلاثة اضعاف الثاني , فان الناتج يساوي 60 . جد قيمة هذان العددان عندما يكون حاصل ضربهما اكبر مايمكن .

نفرض العدد الأول $= x$

نفرض العدد الثاني $= y$

$x+3y = 60$ ---------(1)

$P = xy$ -------------(2)

$x = 60 - 3y$ -------(3)

$P = y(60 - 3y) = 60y - 3y^2$

$dP/dy = 60 - 6y = 0 \quad , \quad 6y = 60 \quad , \quad y = 10$

$x = 60 - 3y$ نعوض عن y في المعادلة الأصلية

$= 60 - 3(10) = 30$

$y'' = -6$ نهاية عظمى

Ex) خزان ماءعى شكل مكعب مفتوح من الأعلى سعته $32m^2$ من الماء . اوجد ابعاد الخزان التي تجعل تكاليف صنعه اقل ما يمكن.

لغرض ايجاد اقل تكاليف صنعه اي بمعنى اقل كمية من المعدن المستعمل وهذه تحسب كمساحة سطحية للخزان التي يجب ان تكون اقل ما يمكن .

المساحة السطحية للخزان = مساحة القاعدة + مساحة الأوجه الأربعة

نفرض طول ضلع القاعدة $= x$

الأرتفاع $= y$

$V = x^2 y = 32$ الحجم

$y = 32/x^2$ ------------(1)

$S = x^2 + 4xy$ المساحة السطحية

$= x^2 + 4x \cdot 32/x^2 = x^2 + 128/x$ ----------(2)

$dS/dx = 2x + (-128x^{-2}) = 2x - 128/x^2 = 0$

$2x = 128/x^2$

$2x^3 = 128$, $x^3 = 64$, $x = 4$

$y = 32/16 = 2$ ومنها

ضلع الخزان = 4 وارتفاعه = 2

Hw)

1) يراد عمل علبة اسطوانية قائمة مقفلة من جهتيها ذات سعة $250\pi\ cm^3$. اوجد ابعادها حتى تكون تكاليف صنعها اقل مايمكن

2) قذفت كرة رأسيا الى اعلى فاذا كانت المسافة D بعد زمن t من بداية الحركة هي $D = 32t - 16t^2$. اوجد كل من السرعة والتعجيل . وهل يستمر الجسم في الصعود بعد مرور 2 ثانية . جد اعلى ارتفاع يصله الجسم والزمن المستغرق لذلك .

<u>رسم الدوال</u>

باستخدام المشتقة:

1) **نجد المشتقة الأولى dy/dx**
2) **نجعل المشتقة الأولى تساوي صفر**
3) **نجد قيمة x ثم نعوض بالمعادلة الأصلية لإيجاد قيمة y اي لإيجاد النقاط الحرجة.**
4) **نجد المشتقة الثانية d^2y/dx^2 لمعرفة النقاط الحرجة نهاية عظمى او صغرى .**
5) **نختبر قيم x الحرجة بالمشتقة الثانية فاذا كانت المشتقة الثانية موجبة عندئذ تسمى النقاط بالنهاية الصغرى , واذا كانت سالبة تسمى نهاية عظمى .**
6) **نجعل قيمة المشتقة الثانية = 0 ثم نجد قيمة x . ونعوضها بالمعادلة الأصلية لإيجاد قيمة y . حيث تسمى هذه النقاط نقاط انقلاب .**
7) **نجد نقاط التقاطع مع المحورين اي نجد x, y**
8) **نضيف نقاط اخرى اذا دعت الحاجة ثم نعمل جدول بالنقاط ونرسم الدالة بمنحني املس غير متعرج .**

Ex)

$y = x^3 - 3x^2 + 2$ **ارسم الدالة واوجد النهايات العظمى والصغرى ونقاط الأنقلاب**

$dy/dx = 3x^2 - 6x = 0$

$3x(x - 2) = 0$

$x = 0$, $y = 0 - 0 + 2 = 2$ $(0,2)$ اما

$x = 2$, $y = 8 - 12 + 2 = -2$ $(2, -2)$ او

$d^2y/dx^2 = 6x - 6$ -------if $x = 0$ ------- $= 6(0) - 6 = -$

اذن النقطة $(0,2)$ نهاية عظمى

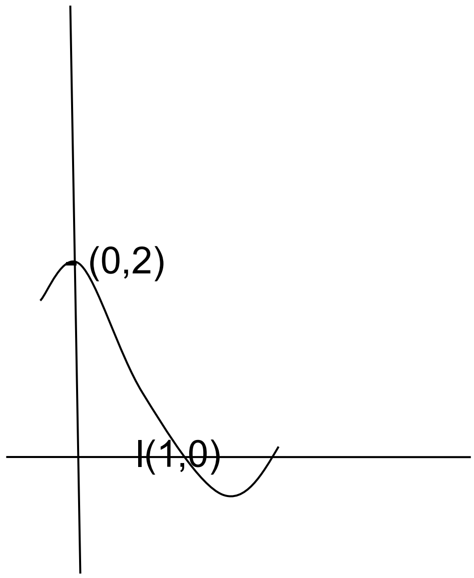
If $x = 2$ ------ $d^2y/dx^2 = 6(2) - 6 = +$

اذن النقطة $(2, -2)$ نهاية صغرى

$d^2y/dx^2 = 0$

$6x - 6 = 0$, $x = 1$, $y = (1)^3 - 3(1)^2 + 2 = 0$,

$(1,0)$ نقطة انقلاب



(2,-2)*

Homework)

ارسم الدالة بايجاد نقاط الدوران للدالة

$y = x^3 – 6x^2 + 9x$

$y = 3x – x^3$

$y = 8x^2 – x^4$

(الكورس الثاني)
الأسبوع الاول

<u>التكامل (Integration), التكامل غير المحدد, تكامل الدوال الجبرية, والمثلثية</u>

التكامل (Integration), التكامل غير المحدد, تكامل الدوال الجبرية, والمثلثية

التكامل : هو عكس عملية التفاضل او عكس المشتقة, بمعنى ان التكامل عملية بناء الدالة في حين التفاضل هو عملية هدم الدالة, والعمليتان احدهما تعاكس الأخرى.

اما المعادلة التفاضلية فهي المعادلة التي تحتوي على مشتقة بالنسبة الى متغير ما , مثل $dy/dx = f(x)$

يرمز للتكامل بالرمز $\int$ وهو عكس الرمز d .

التكامل نوعان :

1) التكامل المحدد : وهو ما يدل على ايجاد الكل او المجموع ويكون واضحا رياضيا في ايجاد المساحات المحددة للمنحنيات او ايجاد بعض الحجوم او اطوال المنحنيات او مركز الأثقال ----الخ
2) التكامل غير المحدد : وهو التكامل الأعتيادي اي معكوس عملية التفاضل بمعنى اخر ايجاد الدالة الأصلية ان اعطيت مشتقتها.

Ex)

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$dy = 2x\,dx$$

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

$$y = x^2 + c$$

المطلوب ايجاد y بدلالة x اي ايجاد المعادلة الأصلية لهذه المعادلة التفاضلية وحيث ان 2x هي مشتقة لـ x^2 اضافة الى عدد ثابت x^2 +c لأن مشتقة الثابت صفر

Ex)

$$dy/dx = x^2\sqrt{y} \qquad y > 0$$

$$dy\,y^{-1/2} = x^2\,dx$$

$$2y^{1/2} = 1/3x^3 + c$$

$$2(4)^{1/2} = 1/3(3)^3 + c$$

$$4 = 9 + c, c = -5$$

$$2y^{1/2} = 1/3x^3 - 5$$ المعادلة

$$y = 1/2(x^3/3 - 5)^2$$

حل المعادلة التفاضلية للمنحني المار بالنقطة (3,4)

$y^{-1/2}$ هي مشتقة للدالة $2y^{1/2}$ + ثابت

$x^2\,dx$ هي مشتقة للدالة $1/3\,x^3$ + ثابت

ملاحظة : لإيجاد التكامل يجب ان تتوفر مشتقة الدالة

تكامل الدوال الجبرية

قوانين التكامل غير المحدد:

1) تكامل دالة متفاضلة (dy) = الدالة + ثابت

$$\int dy = y + c$$

$$\int dx = x + c$$

2) يمكن تحريك الثابت عبر اشارة التكامل , ولا يمكن تحريك المتغيرات عبر اشارة التكامل.

$$\int a\,dy = a\int dy = ay + c$$

3) تكامل مجموع او فرق تفاضلين او اكثر = مجموع او فرق تكاملهما

$$\int (dy \pm dx \pm dq + ----) = \int dy + \int dx + \int dq + ---$$

4) تكامل دالة مرفوعة الى اس (متفاضلة) $y^n\,dy$ اذا كان $n \neq -1$ يكون باضافة واحد للاس والقسمة على الأس الجديد

$$\int y^n dy = \frac{y^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int x^{2/3} dx = \frac{x^{5/3}}{5/3} + c = 3/5 x^{5/3} + c$$

اذا كانت الدالة y متعددة الحدود ومرفوعة الى اس , فيجب ان تتوفر مشتقة الدالة او مشتقة داخل قوس

Ex)

$$dy = \sqrt{2x+1}\ dx$$

$$y = \int (2x+1)^{1/2} dx = 2/2 \int (2x+1)^{1/2} dx = 1/2 - \frac{(2x+1)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + c$$

Ex) $\int (x^2 - \sqrt{x})\, dx$

$$= \int (x^2 - x^{\frac{1}{2}})\, dx = \int x^2\, dx - \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

Homework) 1) $\int (2 - 7t)^{\frac{2}{3}}\ dt$

2) $\int \frac{(z+1)}{3\sqrt{z2 + 2z + 2}}\, dz$ 3) $\int \frac{dx}{(3x+2)^2}$

Examples

1. $\int 5\,dx = 5x + C$
2. $\int x\,dx = (1/2)x^2 + C$
3. $\int x^2\,dx = (1/3)x^3 + C$
4. $\int x^3\,dx = (1/4)x^4 + C$
5. $\int 3x^2 + 2x + 1\,dx = x^3 + x^2 + x + C$
6. $\int x^4 + 2x^2 + 3\,dx = (1/5)x^5 + (2/3)x^3 + 3x + C$
7. $\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + C$
8. $\int x^{-1}\,dx = ln|x| + C$
9. $\int \sqrt{x}\,dx = (2/3)x\hat{}(3/2) + C$
10. $\int 1/\sqrt{x}\,dx = 2\sqrt{x} + C$
11. $\int 2x^3\,dx = (1/2)x^4 + C$
12. $\int 4x^5\,dx = (2/3)x^6 + C$
13. $\int 6x^6\,dx = (6/7)x^7 + C$
14. $\int x^7\,dx = (1/8)x^8 + C$
15. $\int 10x^9\,dx = x^{10} + C$
16. $\int 7x^8\,dx = (7/9)x^9 + C$
17. $\int 0\,dx = C$
18. $\int 1\,dx = x + C$
19. $\int -x\,dx = -(1/2)x^2 + C$
20. $\int -3x^4\,dx = -(3/5)x^5 + C$
21. $\int 2/x\,dx = 2\,ln|x| + C$
22. $\int 5x^{-4}\,dx = -(5/3)x^{-3} + C$
23. $\int x^0\,dx = x + C$
24. $\int 3x^3 + 2\,dx = (3/4)x^4 + 2x + C$
25. $\int 9x^2 - 4x + 1\,dx = 3x^3 - 2x^2 + x + C$

26. $\int 6x^4 + x^3 + 2x^2\, dx = (6/5)x^5 + (1/4)x^4 + (2/3)x^3 + C$

27. $\int 8x + 10\, dx = 4x^2 + 10x + C$

28. $\int x^2 + 2x + 1\, dx = (1/3)x^3 + x^2 + x + C$

29. $\int x^5 + 2x^4 - x^2\, dx = (1/6)x^6 + (2/5)x^5 - (1/3)x^3 + C$

30. $\int (x^2 + 1)^2\, dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1)\, dx = (1/5)x^5 + (2/3)x^3 + x + C$

31. $\int x^2\, dx = x^3 / 3 + C$

32. $\int 3x^2 + 2x + 1\, dx = x^3 + x^2 + x + C$

33. $\int e^x + 5dx = e^x + 5x + C$

34. $\int (x^3 - 2x^2 + x - 1)dx = (1/4)x^4 - (2/3)x^3 + (1/2)x^2 - x + C$

35. $\int (2x + 1)(x - 3)\, dx = \int (2x^2 - 5x - 3)\, dx = (2/3)x^3 - (5/2)x^2 - 3x + C$

تكامل الدوال المثلثية

قوانين التفاضل تعلمناها سابقا — التكامل عكس التفاضل

1) $d\, sinu = cosu\, du$ — $\int cosu\, du = sinu + c$

2) $d\, cosu = -sinu\, du$ — $\int sinu\, du = -cosu + c$

3) $d\, tanu = sec^2 u\, du$ — $\int sec^2 u\, du = tanu + c$

4) $d\, cotu = -csc^2 u\, du$ — $\int csc^2 u\, du = -cotu + c$

5) $d\, secu = secu\, tanu\, du$ — $\int secu\, tanu\, du = secu + c$

6) $d\, cscu = -cscu\, cotu\, du$ — $\int cscu\, cotu\, du = -cscu + c$

Exs) $\int cos2x\, dx = ½ \int cosx.2dx = ½\, sin2x + c$

$$\int \frac{Cos2x}{sin^2 2x}\, dx = \int cos2x\, sin^{-3} 2x\, dx = ½ \frac{sin^{-2} 2x}{-2} + c$$
$$= -¼ . 1/ sin^2 2x . + c$$

$$\int x\, sin2x^2\, dx = ¼ (-cos2x^2) + c$$

$$\int sin^2 x\, dx = \int ½ (1 - cos2x)\, dx = ½ \int dx - ¼ \int cos2x .2x\, dx$$
$$= ½\, x - ¼\, sin2x + c$$

Homework)

1) $\int sin^2 x\, cosx\, dx$

2) $\int cot^3 x\, dx$

3) $\int tan(x-2)^2 (x-2)\, dx$

4) $\int cos^3 x\, dx$

Examples

(1) $\int sin(x)\, dx = -cos(x) + C$

(2) $\int cos(x)\, dx = sin(x) + C$

(3) $\int sec^2(x)\, dx = tan(x) + C$

(4) $\int csc^2(x)\, dx = -cot(x) + C$

(5) $\int sec(x)\, tan(x)\, dx = sec(x) + C$

(6) $\int csc(x)\, cot(x)\, dx = -csc(x) + C$

(7) $\int 2\, sin(x)\, dx = -2\, cos(x) + C$

(8) $\int 3\, cos(x)\, dx = 3\, sin(x) + C$

(9) $\int sin(2x)\, dx = -(1/2)\, cos(2x) + C$

(10) $\int cos(3x)\, dx = (1/3)\, sin(3x) + C$

(11) $\int sin(3x)\, dx = -(1/3)\, cos(3x) + C$

(12) $\int cos(5x)\, dx = (1/5)\, sin(5x) + C$

(13) $\int sec^2(7x)\, dx = (1/7)\, tan(7x) + C$

(14) $\int csc^2(3x)\, dx = -(1/3)\, cot(3x) + C$

(15) $\int sec(x)\, tan(x)\, dx = sec(x) + C$

(16) $\int csc(x)\, cot(x)\, dx = -csc(x) + C$

(17) $\int sin^2(x)\, dx = (x/2) - (1/4)\, sin(2x) + C$

(18) $\int cos^2(x)\, dx = (x/2) + (1/4)\, sin(2x) + C$

الأسبوع الثاني

<u>**تكامل الدوال الأسية واللوغارتمية**</u>

تكامل الدوال الأسية واللوغارتمية

- نسترجع تفاضل الدوال الأسية واللوغارتمية

$$d(e^x) = e^x dx$$

$$d\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)} \cdot f'(x)dx$$

$$d(lnx) = 1/xdx$$

$$d\left(lnf(x)\right) = 1/f(x) \cdot f'(x)dx$$

- تكامل الدالة الأسية هي نفس الدالة الأسية, شرط توفر مشتقة الأس

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = lnx + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = lnf(x) + c$$

- تكامل الدالة اللوغارتمية :اذا مشتقة المقام موجودة في البسط فالتكامل = ln للمقام

الدالة الأسية $y = a^x$

يجب توفر lna اضافة الى مشتقة الأس

لذلك تضرب وتقسم الدالة a^x في lna

$$\int dy = \int a^x dx$$

$$(lna/lna) \int a^x dx = a^x \cdot 1/lna + c$$

Exs) 1) $\int e^{3x} \; dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c$

2) $\int \left(e^{x} + e^{(-x)}\right)^{2} dx$

$\left(e^{x} + e^{(-x)}\right)^{2} = e^{(2x)} + 2 + e^{(-2x)}$

$\int e^{(2x)}\, dx + \int 2\, dx + \int e^{(-2x)}\, dx$

$½e^{(2x)} + 2x - ½e^{(-2x)} + C$

3) $\int \; (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\, dx = ½\, e^{2x} + 2x - ½\, e^{-2x} + c$

4) $\int \; tanx\; dx$ = - ∫ - sinx/ cosx . dx = - ln cosx + c

$Given: \int tan\, x dx$

$Step\ 1: Use\ the\ identity\ tan\ x\ =\ sin\ x\ /\ cos\ x$

$So, \int tan\ x\ dx = \int (sinx/cosx)dx$

$This\ matchesthe\ standard\ form: \int f'(x)/f(x)dx = ln|f(x)| + C$

$Here,$

$f(x) = cosx \qquad and$

$f'(x) = -sinx$

$So: \int (sinx/cosx)dx = -ln|cosx| + C$

$Therefore: \int tan\, x dx = -ln|cosx| + C$

5) $\int \; cot\ x\ dx \; = \; \int \; (cos\ x\ /\ sin\ x)\ dx \; = \; ln\ |sin\ x| \; + \; c$

6) $\int \; sec\ x\ dx \; = \; \int \; [sec\ x\ (sec\ x \; + \; tan\ x)]\ /\ (sec\ x \; + \; tan\ x)\ dx$

$= \; ln\ (secx \; + \; tanx) \; + \; c$

7) $\int \; 2^{\;3x} dx = \frac{1}{3} \int \; 2^{3x} \; .3\, .\, dx \; = 2^{\;3x} . \frac{1}{3}\ ln2 \; + \; c$

I. Exponential Function Integrals

1. $\int e^x dx = e^x + C$

2. $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$

3. $\int e^{x^2} \cdot 2x dx = e^{x^2} + C$

4. $\int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$

5. $\int 2^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C$

6. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx = e^{\sin x} + C$

7. $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$

8. $\int 7^{3x} \cdot 3dx = \frac{7^{3x}}{\ln 7} + C$

II. Logarithmic Function Integrals

1. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

2. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x^2+1| + C$

3. $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

4. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

5. $\int \frac{\ln(x^2+1) \cdot 2x}{x^2+1} dx = \frac{(\ln(x^2+1))^2}{2} + C$

6. $\int \ln(\sqrt{x}) \, dx = x \ln(\sqrt{x}) - x + C$

Hw)

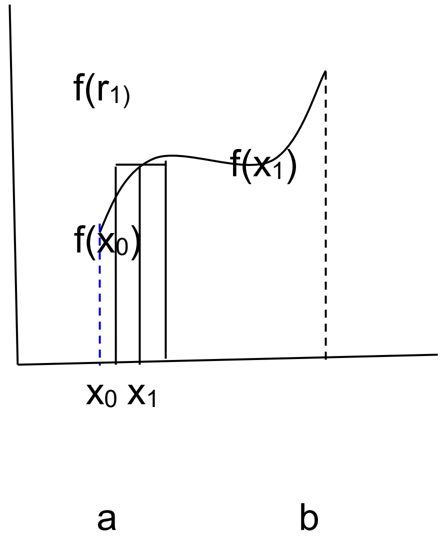
(1) $\int sin^5 x \, dx$
(2) $\int \frac{e^x}{e^x-1} \, dx$
(3) $\int lin \, x \, . \, \frac{1}{x} \quad dx$
(4) $\int \frac{ln \, x}{x} \, dx$

الأسبوع الثالث

<u>التكامل المحدد, المساحة تحت المنحنى, المساحة بين منحنيين</u>

التكامل المحدد, المساحة تحت المنحنى, المساحة بين منحنيين

يمكن ان نحسب المساحة المحصورة بين المنحني $f(x)$ والمحور السيني في النطاق $[a, b]$ وذلك بتقسيم المنطقة الى شرائح صغيرة كمستطيلات او شبه منحرف , ثم تجمع هذه الأقسام وكلما كثر عدد التقسيمات وصغرت مساحتها كلما اقتربت من المساحة الصحيحة .



مساحة الشريحة الواحدة عبارة عن $(x_1 - x_0)\, f(r_1)$

ومجموع مساحات هذه الشرائح تعطي المساحة الكلية

$$A_a^b(n) = \sum_{k=i}^{n} \Delta x_k\, f(r_k)$$

$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=i}^{n} \Delta x_k\, f(r_k)$$

فاذا كان عدد (n) الى مالانهاية بحيث ان القاعدة لكل تقسيمة تقترب من الصفر

اي ان $\Delta x_k = 0$ فنحصل على القيمة الصحيحة للمساحة ويرمز لهذه النهاية بالرمز $\int_a^b$ وهو التكامل من a الى b للدالة f(x) بالنسبة الى x وهي تمثل المساحة المحصورة بين المحور السيني ومنحني الدالة f(x) والمستقيمين x=a و x=b وتسمى a النهاية السفلى , b النهاية العليا للتكامل

$$A_a^b = \int_a^b f(x)\, dx$$

ويمكننا ان نستنتج من هذا التعريف , حيث $a<c<b$

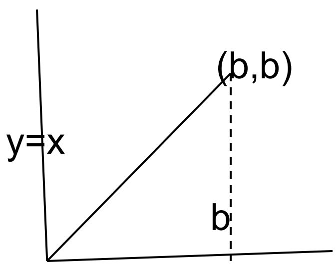
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = - \int_b^a f(x)\, dx$$

مثال : جد المساحة المحصورة بين المستقيم $f(x) = x$ والمحور السيني من نقطة الأصل والمستقيم $x = b$.

كما هو معروف من مبادئ الهندسة هذه المساحة = $\frac{1}{2} b^2$ = مساحة المثلث

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = \int_0^b x\, dx = [\, x^2/2\,]_0^b = b^2/2 - 0 = b^2/2$$

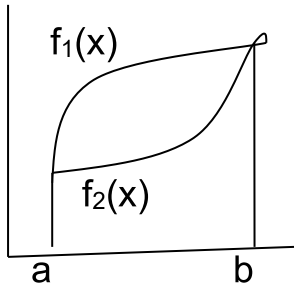


Hw) 1) كما في المثال السابق للدالة $y = x^2$

2) جد المساحة الكلية المحصورة بين المنحني $y = x^3 - 4x$ ومحور السينات

المنحني يقطع محور السينات , تجعل $y = 0$ لاستخراج نقاط التقاطع او حدود التكامل

<u>المساحة بين منحنيين</u>



المساحة بين المنحنيين عبارة عن التكامل المحدد =

المساحة تحت المنحني $f_1(x)$ في [a,b] مطروحا منها

المساحة تحت المنحني $f_2(x)$ في نفس النطاق

Ex) جد المساحة بين المنحني $y = 2 - x^2$ والخط المستقيم $y = - x$

اولا نجد نقاط تقاطع المنحني مع الخط المستقيم

$2 - x^2 = - x$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2 , x = - 1$ وهي حدود التكامل

$A = \int_{-1}^{2} [f_1(x) - f_2(x)] dx$

لمعرفة اي المنحنيين اعلى نعوض باية قيمة لحدود x [-1,2] والقيمة الكبرى هي للمنحني الأعلى .

$= \int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x) dx$

$= [2x - 1/3 . x^3 + ½ x^2]_{-1}^{2} = [(4 - 8/3 + 2) - (- 2 + 1/3 + ½) = ½$

*أمثلة عن التكامل المحدد *

$$\boldsymbol{y = \int_1^2 (x^4+1)^1 dx = \left\{\int_1^2 x^4\ dx + \int_1^2 1\ dx\right\}}$$

$$y = {}_1^2\left[\frac{x^5}{5}\right] + {}_1^2[x] = \left[\left(\frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5}\right) + (2-1)\right]$$

$$y = \left[\left(\frac{32-1}{5}\right) + (1)\right] = \frac{31}{5} + 1 \quad = (6.2+1) = (7.2)$$

أمثلة عن تطلبيقات التكامل المحدد

ملاحظة :

(x) عند الدوران حول المحور $V = \int_a^b \pi\, y^2\, dx$

$V = \int_a^b \pi\, X^2\, dY$ عند الدوران حول المحور *(y)*

مثال 1 : جــد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بامنحني . و النقطتين

$$\big((\ y = x^2\ )\big),,,,(x=2),(x=0)$$

أولا : جد الحجم عند الدوران حول المحور *x*

ثانيا : جد الحجم عند الدوران حول المحور *y*

الـــحـــل :

1 // $V = \int_a^b \pi\, y^2\, dx \quad (X=0 \ , Y=0)\ ,\ (X=2\ , Y=4)$

$$V = \int_a^b \pi\, y^2\, dx = \pi \int_0^2 (X)^4\, dx = {}_0^2\left[\frac{\pi\, X^5}{5}\right] = \pi\left[\frac{2^5}{5} - 0\right] = \frac{32\,\pi}{5}$$

2 // $V = \int_a^b \pi\, X^2\, dY \quad = \int_0^4 \pi\, Y\, dY \quad = \pi \int_a^b Y\, dY$

$$V = {}_0^4\left[\frac{\pi\, Y^2}{2}\right]$$

V = $\pi\, \frac{16}{2} - 0 \quad = \quad (8\pi)$

*قوانين المساحة بين المنحني و المحورين *

القانون العام $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$

المساحة بين المنحني و المحور (x)

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

مثال // جـد المساحة الواقعه تحت المنحني و المحددة بالمستقيمين:

($Y = x^2$) ,,,,, (x = 3) ,,,,, (x = 1)

الـحـل :

$$A = \int_1^3 y\ dx = \int_1^3 x^2\ dx = {}_1^3\left[\frac{x^3}{3}\right] = \left[\frac{27}{3}\right] - \left[\frac{1}{3}\right] = \left(\frac{26}{3}\right)$$

مثال // جـد المساحة الواقعة بين المنحني و المحور x ؟؟؟

$$x = 8 + 2y - y^2$$

الـحـل :

(X = 0)

$$8 + 2y - y^2 = 0 \rightarrow (4 - y)(2 + y) = 0 \rightarrow \qquad y = 4 \quad , \quad y = -2$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$$

$$A = \int_{-2}^4 x\ dy = \int_{-2}^4 (8 + 2y - y^2)\ dx$$

$$A = {}_{-2}^{4}\left[8y + \frac{2y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]$$

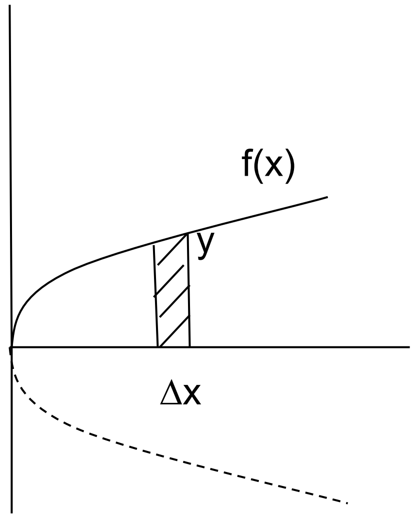
$$A = \left[32 + \frac{32}{2} - \frac{64}{3}\right] - \left[-16 + \frac{8}{2} - \frac{-8}{3}\right]$$

الأسبوع الربع

<u>الحجوم الدورانية , طول قوس المنحنى</u>

الحجوم الدورانية , طول قوس المنحني

الحجم الدوراني هو الحجم الناتج من دوران مساحة محددة بمنحني حول خط مستقيم . مثلا نتصور الجسم قطع الى شرائط رفيعة سمكها Δx بمستويات عمودية على محور x . مساحة مقطعها هو $f(x)\,\Delta x$, عند دوران الشريط حول محور x فانه يصنع حجما مقداره $\pi y^2\,\Delta x$ وتسمى بطريقة القرص . ويكون الحجم الكلي للجسم مساويا الى مجموع حجوم هذه الشرائط , اي ان



$A = \sum_0^b f(x)\,\Delta x$ وبأخذ الغاية

$\Delta x = 0$

$V=\int_0^b f(x)\,dx$

$V = \int_0^b \pi\, y^2\, dx$

Ex) $y = \sqrt{x}$, from (0,0) to (4,2)

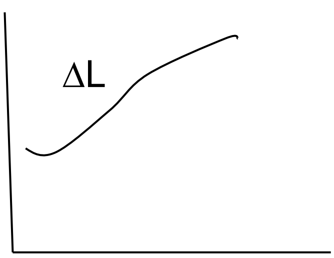
المطلوب ايجاد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة المستوية حول المحور x

الحجم المتكون عبارة عن مساحة القاعدة × الأرتفاع

$V = \int_0^4 \pi\, y^2\, dx = \int_0^4 \pi\, x\, dx = \pi\,[\,x^2/2]_0^4 = \pi/2\,(4)^2 = 8\pi$

Hw) جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المستوية تحت المنحني $y= x^2$ حول المحور السيني من1الى 3

طول المنحني



طول القوس لمنحني $y=f(x)$ للنطاق $[a,b]$ هو L_a^b ويعرف ويعرف بالتكامل المحدد بين a,b

$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1+ (dy/dx)^2}\; dx$

Ex) جد طول قوس المنحني الذي معادلته $x= 2/3 . x^{3/2}$ بين $x=0$ و $x=3$

$y= 2/3\, x^{3/2} \quad \rightarrow dy/dx = 2/3 . 3/2 . x^{1/2} = \sqrt{x}$

$L= \int_0^3 \sqrt{1+x} . dx \quad = 2/3 . [(1+x)^{3/2}]_0^3$

$= 2/3 [(1+3)^{3/2}- (1+0)^{3/2}] = 2/3 [(4)^{3/2} – 1] = 2/3 (8-1) = 14/3$ unit

Hw) $y = 1/3 (x^2 +2)^{3/2}$

جد طول القوس للمنحني الذي معادلته اعلاه , بين $x=0$ و $x=3$.

الأسبوع الخامس

<u>تطبيقات فيزياوية وهندسية (الشغل, العزم, الزخم, عزم القصور الذاتي)</u>

تطبيقات فيزياوية وهندسية (الشغل, العزم, الزخم, عزم القصور الذاتي)

العزم هو حاصل ضرب القوة في بعدها عن محور الدوران

$M = f * d$

ويطلق على d ذراع العزم ويجب ان يكون عمودي على اتجاه القوة , وحداتها N.cm

Ex) جد عزم القوة 100N المؤثرة على سطح اسطوانة نصف قطرها 50 cm في نقطة التماس .

M = f * d

= 100*50 = 5000 N.cm

عزم القصور الذاتي لكتلة معينة تساوي حاصل ضرب الكتلة في مربع البعد عن محور الدوران (بعد مركز هذه الكتلة)

$I = m * d^2$

بتحويل الكتلة الى الحجم في الكثافة , وان الحجم عبارة عن مساحة في السمك الثابت . وباالتالي ان الجسم عبارة اجزاءه , لذلك يصبح القانون

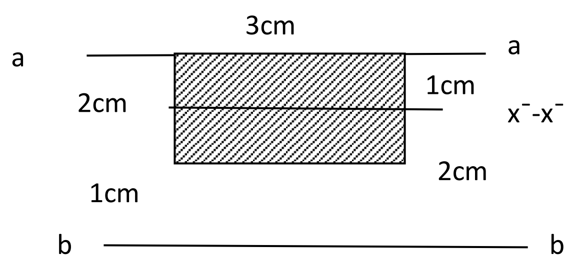
$I = A d^2$

لحساب عزم القصور الذاتي حول المحور x-x لجزء صغير من المساحة الكلية $dIx = dA.y^2$

$Ix = \int dA.y^2$

وحول المحور y-y $Iy = \int dA.x^2$

Ex) جد عزم القصور الذاتي حول المحور b-b علما ان عزم القصور حول المحور a-a هو $8\ cm^4$



نجد اولا المحور المار بمركز المستطيل $x^{-}-x^{-}$

والموازي ل b-b

المحور $x^{-}-x^{-}$ يبعد عن a-a 1cm

$A = 3*2 = 6\ cm^2$

الأسبوع السادس

<u>طرق عامة فى التكامل وتشمل التعويض والتجزئة</u>

طرق عامة في التكامل وتشمل التعويض والتجزئة

طرق التكامل

طريقة التعويض : حيث يكتب التكامل على الصيغة $\int u^n\, du$, وتوجد مشتقة الدالة في التكامل.

Ex) $\int \sin^4 3x \cos 3x\, dx$

$u = \sin 3x$, $du = \cos 3x\ 3$

$= 1/3 \int u^4\, du = 1/3\ .\ u^5 / 5. + c = 1/15\ (\sin 3x)^5 + c$

Hw) $\int \tan^7 5x \sec^2 5x\, dx$

طريقة التحويل الى صيغ اخرى

وهي فرد احدى القوى , حيث توجد مشتقة الدالة

Ex) $\int \sin^5 x\, dx$

$= \int \sin^4 x \sin x\, dx$

$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x\, dx$

نفرض $\cos x = u$ ومشتقة $u = - \sin x\, dx$ $- du =$

$= - \int (1 - u^2)^2\, du = - \int (1 - 2u^2 + u^4)\, du$

او $= \int (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x) \sin x\, dx$

$= - \cos x + 2/3\ .\cos^3 x - 1/5.\ \cos^5 x$

Hw) $\int \cos^3 4x\, dx$

$\int \cot^3 x\, dx$

التكامل بالتجزئة **by parts**

ضرب دالتين

$y = uv$

$d(uv) = u.dv + v.du$

$\int d(uv) = \int u.dv + \int v.du$

$d\, udv = u.v - \int v.du$ او

Ex) $\int x \sin x \, dx$

Let $u = x \rightarrow du = dx$

$\int \sin x \, dx = \int dv \rightarrow v = -\cos x$

$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$

$= -x \cos x + \sin x + c$

Ex) $\int x e^x dx$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

$= x e^x - \int e^x dx \quad = x e^x - e^x + c$

Hw) 1) $\int x \ln x \, dx$

2) $\int x^2 \ln x \, dx$

3) $\int \ln x \, dx$

الأسبوع السابع

استخدام الكسور الجزئية والأسية واللوغارتمية

استخدام الكسور الجزئية والأسية واللوغارتمية

لقد تعلمنا عملية تركيب الكسور كما يلي:

$$\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x+2} = \frac{x+2-2(1-x)}{(1-x)\ \ (1-x)} = \frac{3x}{2-x-x^2}$$

الكسور الجزئية : وهي عملية تجزئة الكسر الى كسور جزئية

Ex) $$\frac{3x}{2-x-x^2} = \frac{3x}{(2+x)(1-x)}$$

$$= \frac{A}{(2+x)} + \frac{B}{(1-x)}$$

لإيجاد A , B $$\frac{3x}{2-x-x^2} = \frac{A(1-x)+B(2+x)}{(2+x)(1-x)}$$

$3x = A(1-x) + B(2+x)$

If $x=1$, $3B = B \rightarrow B = 1$

If $x = -2$, $3A = -6 \rightarrow A = -2$

$$= \frac{-2}{(2+x)} + \frac{1}{(1-x)}$$

Ex) $$\frac{7x^2 + x + 1}{(2x+1)(x+2)(1-x)}$$ جد الكسور الجزئية للمقدار

$$= \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(2x+1)} + \frac{C}{(2x+1)}$$

$7x^2 + x + 1 = A(x+2)(1-x) + B(2x+1)(1-x) + C(2x+1)(x+2)$

If $x=1 \rightarrow 9 = 9C \rightarrow C = 1$

$x = -2 \rightarrow 27 = -9B \rightarrow B = -3$

$x = 0 \rightarrow 1 = 2A - 3 + 2 \rightarrow A = 1$

هناك ثلاث قواعد مهمة تشترط عند تجزئة الكسور

1) يحلل مقام الكسر الأصلي

2) يجعل كسر جزئي لكل عامل من مقام الكسر الاصلي مثل

$$\frac{(3x+2)}{x^2(x^2-1)} = \frac{(3x+2)}{x.x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

3) الكسر الأصلي يجب ان يكون كسرا اعتياديا حقيقيا , اي ان درجة البسط تقل بواحد عن درجة المقام . اما اذا كان البسط اعلى او يساوي درجة المقام (الكسر اللفظي) فيجب اجراء قسمة اولا ثم تجزئة الكسر الباقي.

Homework

جد الكسور الجزئية للمقدار $\frac{(3x+1)}{x(x^2+1)}$

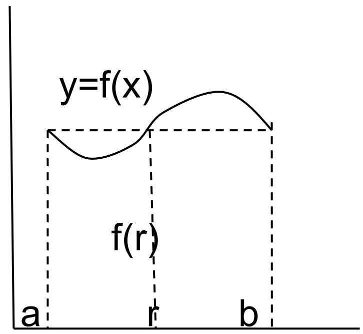
الأسبوع الثامن

الطرق العددية في التكامل, قاعدة شبه المنحرف

الطرق العددية في التكامل, قاعدة شبه المنحرف

القيمة المتوسطة للتكامل

عبارة عن مستطيل مساحته تكافئ المساحة المطلوبة تحت المنحني.



$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(r)$

حيث $a \le r \le b$

Ex) $f(x) = 2x$ جد القيمة المتوسطة لتكامل الدالة

في النطاق $[1,3]$

$\int_1^3 2x\,dx = [x^2]_1^3$

$= 3^2 - 1^2 = 8$

$(b-a)\,f(r)$ هذا التكامل يجب ان يساوي

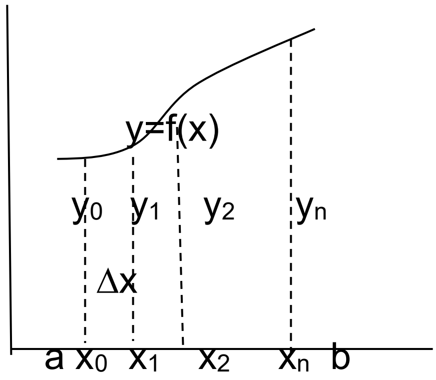
$f(r) = 2r$ بالتعويض في الدالة الأصلية

$(b-a)\,f(r) = (3-1)\,2r$

$4r = 8 \rightarrow r = 2 \rightarrow 1<2<3$

Hw) حقق نظرية القيمة المتوسطة لتكامل الدالة $3x^2$ للنطاق $[1,5]$.

التكامل المحدد بالتقريب (المساحة التقريبية باستخدام قاعدة شبه المنحرف)



يقسم النطاق a,b الى n من الأقسام المتساوية, كل قسم يساوي

$\Delta x = b – a / n$

$x_0 = a$

$x_1 = a + \Delta x$

$x_2 = a + 2\Delta x$

$x_n = a + n\Delta = b$

فقيمة التكاملات عبارة عن مجموع التكاملات في هذه الفترات

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x1} f(x)\,dx + \int_{x1}^{x2} f(x)\,dx + \text{-------} + \int_{xn-1}^{b} f(x)\,dx$

والمساحة المحصورة بين المنحني ومحور x عبارة عن مجموع تقريبا مساحة اشباه المنحرفات .

حيث ان مساحة شبه المنحرف = ½ (مجموع القاعدتين) × الأرتفاع

$= ½ (y_0 + y_1)\Delta x$

اذن قيمة التكامل = T

$\int_a^b f(x)\,dx = ½ (y_0 + y_1)\, \Delta x + ½ (y_1 + y_2)\, \Delta x + \text{-----------} + ½ (y_{n-1} + y_n)\, \Delta x$

$T = [\, ½ (y_0 + y_1) + (y_1 + y_2 + y_3 + \text{-------} + y_{n-1})\,]\, \Delta x$

$yn = f(x_n)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_0 = f(x_0)$ حيث

Ex) اوجد قيمة التكامل بالتقريب بطريقة شبه المنحرف وذلك اذا كانت $n=4$ ثم جد قيمة التكامل الصحيحة

$\int_1^2 x^2\,dx$

قيمة التكامل الصحيحة $\int_1^2 x^2\,dx = [\,x^3/3\,]_1^2 = 1/3\,[8-1] \approx 2.333$

اما طريقة شبه المنحرف , تقسم المساحة بين $x=1$, $x=2$ الى اربعة اقسام متساوية كل منها يساوي Δx

$\Delta x = (b-a)/n = (2-1)/4 = 1/4$

$x_0 = 1$, $y_0 = f(x_0) = 1^2$, $y_0 = 1$

$x_1 = a + \Delta x = 1 + 1/4 = 5/4$, $y_1 = f(x_1) = (5/4)^2 = 25/16$

$x_2 = a + 2\Delta x = 1 + 1/2 = 6/4$, $y_2 = f(x_2) = (6/4)^2 = 36/16$

$x_3 = a + 3\Delta x = 1 + 3/4 = 7/4$, $y_3 = f(x_3) = (7/4)^2 = 49/16$

$x_4 = a + 4\Delta x = 1 + 1 = 2 = b$, $y_4 = f(x_4) = (2)^2 = 4$

قيمة التكامل المحدد $[\,1/2\,(1+4) + 110/16\,]$

$T = (5/2 + 55/8)\,1/4 = 75/8 \cdot 1/4 = 2.3437$

Hw) اذا كان $\int_0^1 1/\,1+x^2 \,.\, dx = \pi/4$

جد القيمة التقريبية للعدد (π) باستخدام طريقة شبه المنحرف اذا كانت $n=10$

الأسبوع التاسع

حل المعادلات التفاضلية

حل المعادلات التفاضلية

وهي المعادلة التي تشمل على مشتقة واحدة على الاقل لدالة مجهولة , مثل $dy/dx = \cos x$ او وجودها على شكل تفاضل مثل $(x^2 + y^2)\,dx - 2xydy = 0$ والهدف هو حل المعادلات التفاضلية, اي ايجاد الدالة المجهولة او الدوال لهذه المعادلات . تظهر هذه المعادلات كثيرا في(قوانين الفيزياء , الكيمياء, الهندسة, الأقتصاد) . مثال :

اذا اردنا ان نتحقق بان العلاقة او الدالة $y = e^{2x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية التالية

$d^2y/dx^2 + dy/dx - 6y = 0$

$dy/dx = 2\,e^{2x}$

$d^2y/dx^2 = 4e^{2x}$

$4e^{2x} + 2e^{2x} - 6e^{2x} = 0$ نعوض في المعادلة , وهو المطلوب

Ex) حل المعادلة التفاضلية التالية

$dy/dx = x\,\sqrt{y}$

$\int 1/\sqrt{y}\,.\,dy = \int x\,dx$

$2y^{1/2} = x^2/2 + c$

$2\,\sqrt{y} = x^2/2 + c$

$\sqrt{y} = x^2/4 + c$

Hw) الدالة $x^4 - xy^3 + y^2 = c$ اثبت انها حل للمعادلة التفاضلية التالية

$(4x^3 - y^3)\,dx + (2y - 3xy^3)\,dy = 0$

الأسبوع العاشر

ايجاد قيمة اعلى او اوطأ نقطة منحني شاقولي

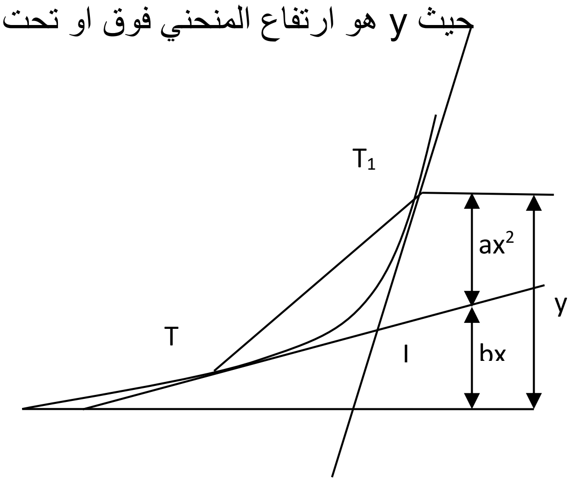
ايجاد قيمة اعلى او اوطأ نقطة منحني شاقولي

عند تغير انحدار الطرق فانه يتطلب ربط المنحدران بمنحني لكي تكون حركة مرور العربات انسيابية .

ان الصيغة الرياضية لشكل المنحني الذي يكون على شكل قطع مكافئ (Parbolic Curves) حيث يكون هذا النوع من المنحنيات مسطحا ومنبسطا قرب نقطتي التماس .

$y = ax^2 + bx$

حيث y هو ارتفاع المنحني فوق او تحت نقطة التماس , والتي تبعد مسافة x منها .



ان اعلى او اوطأ نقطة على اي منحني هي نقطة التحول (الأنعطاف) Turning Point , اي الموقع الذي يكون فيه انحدار المماس صفر .

يمكن ايجاد انحدار المماس بواسطة حساب مشتقة y بالنسبة الى x .

$y = ax^2 + bx$

$dy/dx = 2ax + b$

$dy/dx = 0$

$2ax + b = 0 \rightarrow \quad x = -b/2a$

Ex) الأنحدار 2%

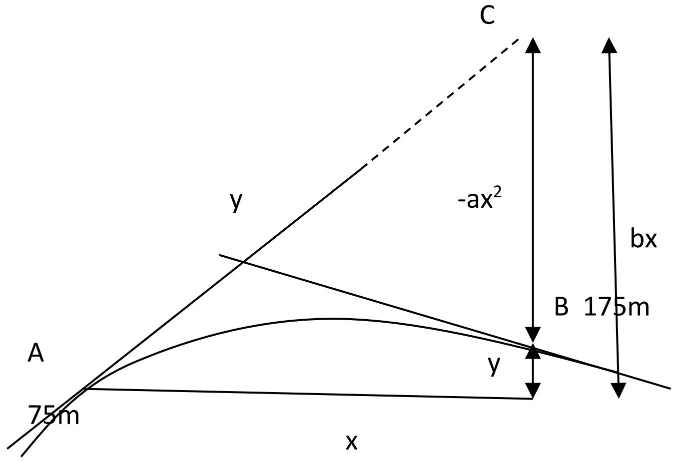
المناسيب للنقاط معلومة , فرق منسوبي B,C هو

1.83

$ax^2 = 1.83 \quad , \quad b = 2\%$

$-(100)^2 a = 1.83$

$a = -1.83(10)^{-4}$



$$x = \frac{-2*10^{-2}}{-2*1.83*10^{-4}} = \frac{10^{2}}{1.8} = 54.6 \text{ m}$$

منسوب $A + ax^2 + bx =$ اذن منسوب اعلى نقطة

الأسبوع الحادي عشر

الأعداد المركبة, جمع وطرح, ضرب وقسمة.

الأعداد المركبة, جمع وطرح, ضرب وقسمة.

توجد معادلات من الدرجة الثانية ليس لها حل في فئة الأعداد الحقيقية R (وهي الموجبة والسالبة والصفر) مثل $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$ ليس لها حل لان $x^2 \geq 0$ اي $x \in R$. عليه توجد فئة الأعداد المركبة بحيث ان الأعداد الحقيقية تكون جزءا من هذه العداد المركبة.

الأعداد المركبة

العدد المركب هو الزوج المرتب من الأعداد الحقيقية في الصور (a,b) ويرمز لها بالرمز c ويمكن كتابتها رياضيا $c = \{ (a,b) : a,b \in R\}$

التساوي :

$(a,b) = (c,d)$

$a = c \ , \ b = d$ اذا كان

اي ان كل عنصر من عناصر اي زوج يتساوى مع العنصر المقابل له في الزوج الآخر.

الجمع :

حاصل جمع عددين (a,b) , (c,d) هو

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \ or \ (c+a, d+b)$

Ex) **جد حاصل جمع الأعداد التالية :**

$(3,5) + (-2,7) = (3-2, 5+7) = (1,12)$

$(2,-3) + (5,4) = (2+5, -3+4) = (7,1)$

Ex) جد العدد الذي اذا اضيف الى (a,b) اصبح حاصل الجمع (0,0)

نفرض العدد هو (x,y)

(x,y) + (a,b) = (x+a, y+b) = (0,0)

ومن خاصية التساوي $x+a = 0 \rightarrow x = -a$

$y+b = 0 \rightarrow y = -b$

(x,y) = (- a, - b)

الطرح:

باقي الطرح عبارة عن الجمع للعددين (a,b) مع العدد $(-c, -d)$

Ex) $(5,3) - (2,1) = (5-2 , 3-1) = (3,2)$

$(2,-1) - (4,-3) = (2-4 , -1-(-3)) = (-2,2)$

الضرب:

يعرف حاصل ضرب العددين $(a,b) , (c,d)$ بما يلي :

$(a,b) . (c,d) = (ac - bd , ad + bc)$

Ex)

$(3,1).(5,2) = (3x5 - 1x2 , 1x5 + 3x2) = (13,11)$

$(1,1).(1,-1) = (1x1-(1x-1), 1x-1+ 1x1) = (2,0)$

Ex) ما هو العدد الذي اذا ضرب في العدد (a,b) يكون الناتج $(1,0)$

نفرض العدد (x,y)

$(a,b).(x,y) = (ax - by , bx +ay) = (1,0)$

ومن شرط التساوي نجد ان $ax-by = 1 , ay+bx = 0$

ومن حل هاتين المعادلتين انيا نجد $x = a / (a^2 +b^2) , y = -b / (a^2+b^2)$

اي ان العدد $(x,y) = (a / (a^2 +b^2) , -b / (a^2+b^2))$

مقلوب العدد :

يطلق على العدد $(a/ a^2+b^2 , -b/a^2+b^2)$ مقلوب العدد (a,b) والعكس صحيح , بشرط

$(a,b) \neq (0,0)$

القسمة :

يعرف خارج قسمة (a,b) على (c,d) بانه حاصل ضرب (a,b) مع مقلوب العدد (c,d) اي:

$(a,b)\div(c,d) = (a,b)(c/c^2+d^2 , -d/c^2+d^2)$ بشرط ان $(c,d) \neq (0,0)$

يرمز له $= z^{-1}$

Ex) جد مقلوب $(3,4)$ ثم جد حاصل ضرب $(1,2),(3,4)$ وكذلك خارج القسمة.

نرمز للعدد z_1 , مقلوب العدد z_1^{-1}

$Z_1^{-1} =(3/3^2+4^2 , -4/3^2+4^2) = (3/25 , -4/25)$

يرمز للعدد $(1,2)$ z_2

$z_1.z_2 = (1,2).(3,4) =(1*3- 2*4, 1*4+2*3) = (-5,10)$

$$z_2\div z_1 = z_2.z_1^{-1} = \left(\frac{1*3+2*4}{25} , \frac{1*(-4)+2*3}{25}\right) =(11/25 , 2/25)$$

$(1,2)(3/25,-4/25) = (3/25 + 8/25 , -4/25 + 6/25) = -11/25 , 2/25$

او $\dfrac{1,2}{3,4}$

يمكن تعريف الجذر التربيعي لأي عدد سالب كما يلي :

$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2(-1)} = \sqrt{a^2}.\sqrt{-1} = ai$

حيث $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$

$\sqrt{-25} = \sqrt{5^2}\ \sqrt{-1} = 5i$

$\sqrt{-3} . \sqrt{-12} = (i\sqrt{3})(2i\sqrt{3}) = 2i^2\sqrt{3}.\sqrt{3} = 6i^2 = -6$

ملاحظة $\sqrt{-a} . \sqrt{-b} \neq \sqrt{ab}$

Ex) اذا كان $a+2i = 3+bi$ فاوجد قيمتي a,b

من تعريف التساوي فان الجزئين الحقيقيين يجب ان يتساوى وكذلك الجزئين التخيلين

$a=3 \quad , \ b=2$

Ex) جد حاصل ضرب العددين $3-4i \, , \, 4+3i$

$$(3-4i).(4+3i) = 3*4 - 3*3i - 4i*4 - 4i*3$$

$$= 12- 9i - 16i - 12i^2$$

$$= 12+12-7i = 24- 7i$$

Ex) جد حاصل ضرب $z=3+4i$ مع مرافقه $\bar{z}=3-4i$

$$z.\bar{z} = (3+4i).(3-4i)$$

$$= 3*3 - 3*4i + 4i*3 - 4i*4i$$

$$= 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$

اي حاصل ضرب اي عدد مركب في مرافقه , يكون عدد حقيقي

Ex) $z = \dfrac{2i}{1+i}$ جد خارج قسمة

نضرب البسط والمقام في مرافق المقام للتخلص من العدد المركب في المقام اي :

$$z = \frac{2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1- i}$$

$$= \frac{2i(1-i)}{1-i+i- i^2} = \frac{2i-2i^2}{1- i^2} = \frac{2i+2}{1+1} = 1+i$$

Ex) جد خارج قسمة $2-3i$ على $3-4i$

$$\frac{2-3i}{3-4i} = \frac{(2-3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{6+8i-9i-12i^2}{9+12i-12i-16i^2}$$

$$= \frac{6-i+12}{9+16} = \frac{18-i}{25} = \frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$$

الأسبوع الثاني عشر

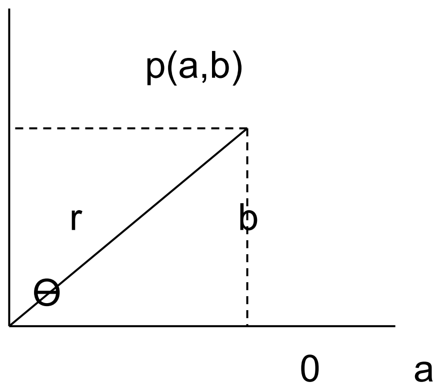
الصيغة القطبية, تحويل الصيغة القطبية الى جبرية وبالعكس, القوى والجذور, تمثيل الجذور بالرسم

<u>الصيغة القطبية, تحويل الصيغة القطبية الى جبرية وبالعكس, القوى والجذور, تمثيل الجذور بالرسم</u>

العدد المركب (a,b) في مستوى الأحداثيات

$x=a$

$y=b$ (0,b)



اي نقطة في المستوي (a,b) يقابلها عدد مركب a+ib يسمى المستوي في هذه الحالة بالمستوي المركب .

في المستوي المركب a هو العدد الحقيقي (a,0) =

$a=a+0i$
(a,0)

على المحور ox , ويمثل العدد bi = o+bi نقطة على المحور y.

تسمى زاوية Θ بسعة العدد المركب a+ib ويرمز له --Arg , ويكتب العدد المركب في الصورة

$z = a+bi$

$= r\cos\Theta + r\sin\Theta i = r(\cos\Theta+i\sin\Theta)$

وهو ما يسمى الصورة المثلثية او القطبية للعدد المركب . حيث r يطلق عليها القيمة المطلقة للعدد المركب z

$|z| \rightarrow$ اي ان $|z| = r$, $\mathrm{Arg}(z) = \Theta$

ولأي عدد صحيح (k) فان

$\mathrm{Cos}(\Theta+2\pi k) = \cos\Theta$

$\mathrm{Sin}(\Theta+2\pi k) = \sin\Theta$

Ex) ضع العدد المركب -3+3i في الصورة القطبية

الأحداثيات p(-3,3)

$a=-3$

$b=3$

$r = \sqrt{(-3)^2 +3^2} = 3\sqrt{2}$

$a=-3 = r\cos\Theta = 3\sqrt{2}\cos\Theta$

$\cos\Theta = -1/\sqrt{2}$

$b=3 = r\sin\Theta = 3\sqrt{2}\sin\Theta$

$\sin\Theta = 1/\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \tan\Theta = 1/\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/-1 = -1$

$\Theta = 180 - 45 = 135°$

العدد المركب $-3 + 3i = 3\sqrt{2}(\cos 135 + i \sin 135)$

Ex) اكتب العدد المركب $z = -1+\sqrt{3}i$ في صورته القطبية

$a= -1 \;,\; b= \sqrt{3}$

$r = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \;,\; a=r\cos\Theta \;,\; b= r\sin\Theta$

$\cos\Theta = -1/2 \;,\; \sin\Theta = \sqrt{3}/2$

$\Theta = 180 - 60 = 120$

$z = 2(\cos120 + I \sin120)$

الأسبوع الثالث عشر

العمليات الأحصائية, التوزيعات التكرارية, المدرج التكراري, الوسط الحسابي, المدى, الأنحراف المعياري

العمليات الأحصائية, التوزيعات التكرارية, المدرج التكراري, الوسط الحسابي, المدى, الأنحراف المعياري

الأحصاء (statistcs) : هو علم يبحث ويعالج المجموعات التي تتكون من مفردات كثيرة , وجمع وتنظيم البيانات عن هذه المجموعات وتحليلها والحكم عليها ومقارنتها بغيرها من المجموعات .

العمليات الأحصائية :وتشمل عملية جمع المفردات العشوائية وتنظيم البيانات اما بجداول احصائية او رسوم بيانية لمعالجتها رياضيا ولسهولة الإطلاع عليها.

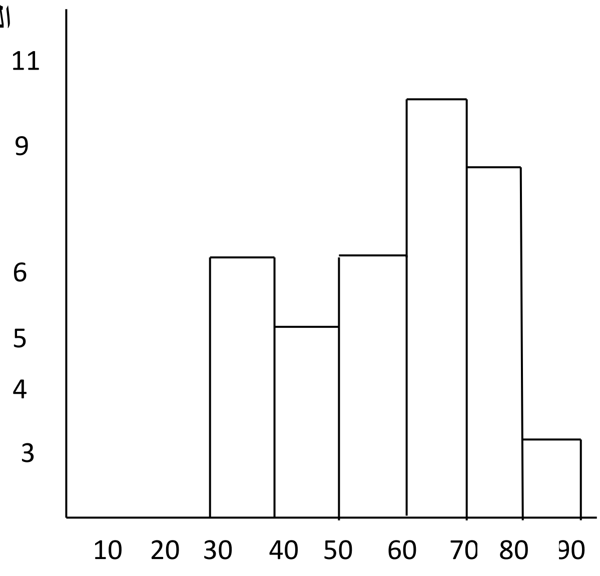
التوزيع التكراري

مثلا درجات 40 طالب في احد الامتحانات , اولا ترتب تصاعديا او تنازليا

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد او النازل

30,35,32,38,60,65,63,73,50,75,60,52,43,40,55,63,70,75,82,87,68,73,82,56,44,
73,63,39,37,53,68,65,79,76,53,46,72,53,45,60.

الفئات	مركز الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد
30 – 39	35	6	6
40 – 49	45	5	11
50 – 59	55	6	17
60 – 69	65	11	28
70 – 79	75	9	37
80 – 89	85	3	40
		40	



المدرج التكراري

الوسط الحسابي لكل فئة يسمى القيمة المتوسطة او مركز الفئة .

الوسط الحسابي

ان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم عددها n هوخارج قسمة المجموع الجبري لهذه القيم على عددها ويرمز لهذا الوسط بالرمز $\bar{x}$. وهو المعدل .

Ex) اذا كانت درجات طالب في الامتحانات 60,55,65,80,70,84 جد الوسط الحسابي او المعدل العام لدرجاته .

$$\bar{x} = \frac{60+55+65+80+70+84}{6} = 414/6 = 69$$

<u>المدى</u> هو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة للمتغير . او هو الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى من البيانات المجمعة .

<u>**الأنحراف المعياري**</u> هو المقياس الاحصائي الذي يعبر عن بعد او قرب البيانات من المتوسط الحسابي والذي يتمثل بالمعادلة التالية :

$$S == \sqrt{1/n \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - \bar{x})^2}$$

حيث ان $n =$ عدد البيانات

$\bar{x} =$ الوسط الحسابي

$x_r =$ مركز الفئة الرائية

Ex) 40, 35, 15, 10, 5 : جد الأنحراف المعياري لإعمار خمسة افراد من عائلة وهي

$\bar{x} = 105/5 = 21$

$(x-\bar{x})^2$	$x-\bar{x}$	x الفئة
361	19	40
196	14	35
36	-6	15
121	-11	10
256	-16	5
970		

الأنحراف المعياري

$$= \sqrt{1/n \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - \bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{970/5} = \sqrt{194} = 13.9$$

Homework :4, 3, 6, 7, 5 جد الأنحراف المعياري لمجموعة الأعداد التالي