وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الجنوبية
المعهد التكنولوجي في البصرة
قسم التقنيات الكهربائية

الحقيبة التعليمية

رياضيات ١

لطلاب المرحلة الاولى

اعداد

م.م ميادة مارد عبد الحسين
مدرس مساعد
قسم التقنيات الكهربائية
2025

وصف المقرر

1- اسم المقرر:
رياضيات ١
2- رمز المقرر:
3- الفصل / السنة:
فصلي
4- تاريخ إعداد هذا الوصف :
14/ 02/ 2025
5- أشكال الحضور المتاحة :
حضوري فقط
6- عدد الساعات الدراسية (الكلي)/ عدد الوحدات (الكلي):
30 ساعة فصليا /2ساعة اسبوعياً/ ٢وحدات
7- اسم مسؤول المقرر الدراسي (اذا اكثر من اسم يذكر)
الاسم: م.م ميادة مارد عبدالحسين الآيميل : mayada.marid@stu.edu.iq
8- اهداف المقرر

١ .تزويد الطلبة بالأساسيات الرياضية الضرورية لدراستهم في المجالات التقنية والهندسية. ٢ .تنمية القدرة على التفكير المنطقي والتحليل الرياضي في حل المشكلات. ٣ .فهم مفاهيم المصفوفات، المعادلات، الدوال، النهايات، والمشتقات. ٤ .ربط المفاهيم الرياضية بالتطبيقات العملية في مجال الكهرباء والإلكترونيك. ٥. تطوير المهارات في تمثيل البيانات والمعادلات بيانياً وتفسير النتائج.	• ..... • ..... • .....

9- استراتيجيات التعليم والتعلم	
الاستراتيجية	1 .أسلوب التخطيط التعاوني للمفاهيم.

2 .استراتيجية العصف الذهني. 3. أسلوب تدوين الملاحظات وفق تسلسل المحتوى 4. التعلم النشط من خلال حل التمارين والمسائل.	

10- بنية المقرر

الأسبوع	الساعات	مخرجات التعلم المطلوبة	اسم الوحدة او الموضوع	طريقة التعلم	طريقة التقييم
1-2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 15-14	2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة 2 ساعة	ان يفهم الطالب ١-المصفوفات و المحددات وخواصها ٢حل المعادلات الخطية بطريقة كرمر ٣-حل المعادلات الخطية بطريقة كرمر ٤-المتجهات وتحليل المتجهات و الكميات المتجهة والقياسية و جبر المتجهات والعمليات الحسابية لـ جبر المتجهات ووحدة المتجهات المتعا مدة ومقياس المتجه والضرب القياسي والاتجاهي وتطبيقات المتجهات ٥- أن يعرف الطالب مفهوم الدوال المثلثية والعلاقات بين الدوال المثلثية والمتطابقات والمعادلات المثلثية ٦- أن يدرك الطالب مفهوم الغاية كوسيلة لتحليل سلوك الدالة عند نقطة معينة ٧- أن يتقن الطالب قواعد الاشتقاق الأساسية	الرياضيات	١. المحاضرات النظرية ٢.محاضرات المناقشة العلمية المباشرة والمفتوحة مع الطلبة ٣-ربط الأفكار السابقة مع المعلومات الجديدة	الامتحانات الأسبوعية والشهرية واليومية والتحريرية وامتحان نهاية الفصل.

11- تقييم المقرر

توزيع كالتالي: 30 درجة امتحانات نظرية لمنتصف الفصل الاول. ١٠درجات امتحانات يومية وتقييم مستمر. 60 درجة امتحان نهاية الفصل

12- مصادر التعلم والتدريس

الكتب المقررة المطلوبة (المنهجية أن وجدت)	مكتبة المعهد للحصول على المصادر الاضافية للمناهج.
المراجع الرئيسة (المصادر)	George B. Thomas,Jr., "Thomas calculus",12th edition,
الكتب والمراجع الساندة التي يوصى بها (المجلات العلمية، التقارير....)	جميع المجلات العلمية الرصينة التي لها علاقة بالمفهوم الواسع للرياضيات.
المراجع الإلكترونية ، مواقع الانترنيت	المواقع على الانترنيت التي تخص الرياضيات والمثلثات والمصفوفات

وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
الجامعـة التقنيـة الجنوبيـة
المعهـد التكنولوجـي بصـرة
قسـم التقنيـات الكهربائية

حقيبـــة تعليميـــة

فـــي

رياضيات ١

لطلبـــة المرحلـة الأولـــى

اعداد

م.م ميادة مارد عبد الحسين
مدرس مساعد
قسم التقنيات الكهربائية

2025

1/نظرة عامة

1 / A الفئة المستهدفة:-

طلبــة المرحلــة الأولــى
المعهــد التقنــي في البصــرة
قســم التقنيــات الكهربائية

1 /B الدوافع -:

فهم المصفوفات واستخدامها في تحليل الانظمة الكهربائية، وحل المعادلات الجبرية والتفاضلية المرتبطة بالتيار والجهد، ومعرفة التكامل والمشتقة في دراسة الاشارات وتغيراتها، ولهذا قمت بإنشاء حقيبة دراسية لتسهيل التعلم في هذا الموضوع.

1 /C الفكرة الرئيسة -:

تهيئة الطالب بالاسس الرياضية اللازمة لفهم وتحليل وتصميم الانظمة الكهربائية والالكترونية، من خلال ربط المفاهيم الرياضية بالتطبيقات الهندسية الواقعية.

1 /D الأهداف السلوكية

بعد دراسة الكورس الاول، سيكون الطالب قادرًا على

١- يستخدم المصفوفات في تحليل انظمة المعادلات الخطية الخاصة بالشبكات الكهربائية

٢- ان يعدد انوع المصفوفات (مثل : مربعة ، قطرية، صفرية.....).

٣- ان يحل المعادلات الخطية بااستخدام طريقة كرامر.

٤- يتعرف الطالب على خصائص المتجهات ويميز بينها وبين الكميات القياسية ويتعلم طرق تمثيلها وتحليلها الى مركباتها.

٥- تعريف الطالب بالدوال المثلثية الاساسية وتطبيقاتها في تحليل الاشارات الكهربائية والدوال الدورية مع ربطها بالزوايا والدوائر الكهربائية.

٦- ان يعرف الطالب مفهوم الغايات وايجاد غاية الدوال واجراء العمليات عليها.

٧-يحسب المشتقات لفهم تغير التيار او الجهد في الدوائر الزمنية

المصفوفات -:

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على ان:

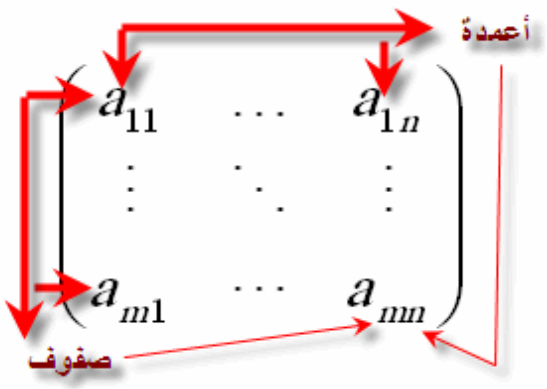
١) يعرف مفهوم المصفوفات
٢) اجراء العمليات الحسابية على المصفوافات
٣) ايجاد المحدد للمصفوفة

الاختبار القبلي

١) عرف المصفوفة
٢) متى تتساوى المصفوفات
٣) هل يمكن جمع او طرح المصفوفات عندما لا تتساوى الاعمدة او الصفوف

المصفوفات (Matrices)

المصفوفة: هي مجموعة مرتبة من الأعداد الحقيقية او المعقدة أوكلاهما معاً منتظمة بشكل صفوف واعمدة, والمصفوفة التي تملك m من الصفوف و n من الاعمدة تدعى مصفوفة من الدرجة $m \times n$ وتكتب بالشكل:



تستخدم المصفوفة كثيرا في

حل المعادلات الخطية وفي علم الاقتصاد وغيرها،

رتبة المصفوفة: هي عبارة عن ضر عدد الصفوف في عدد الأعمدة $(m*n)$

امثلة:

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{vmatrix}_{(3*1)} \qquad |2 \quad 4 \quad 5|_{(1*3)} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}_{2*3)}$$

- **انواع المصفوفات:**

١- **المصفوفة الصفية :** هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط.

مثلاً $[1 \quad 0 \quad -6]$

٢- **المصفوفة العمودية :**هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط. مثلاً $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

٣- **المصفوفة المربعة :** هي مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد اعمدتها.مثلاً

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

٤- **المصفوفة الصفرية :** هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار.مثلاً

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٥- **المصفوفة القطرية:** هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي. مثلاً

القطر الرئيسي

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

٦- **مصفوفة الوحدة** : هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي يساوى واحد. ويرمز لها بالرمز $I_n = I_{n\times n}$ مثلاً

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تساوى مصفوفتين:

نقول عن المصفوفة A تساوي المصفوفة B إذا تحقق الشرطين:

١- إذا كانتا من نفس الرتبة.

٢- عناصرهما المتناظرة متساوية. مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

• العمليات الحسابية على المصفوفات :

جمع و طرح المصفوفات :

لجمع أو طرح مصفوفتين لهما الرتبة نفسها فإننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة للمصفوفتين.

مثلاً

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{bmatrix}$$

مثال: اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \; , C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

اوجد كلاً مما يأتي اذا امكن:

$$a) \quad A + B \qquad b) \; A - B \qquad c) \; B + C$$

الحل:

$$a)\ A+B=\begin{bmatrix}7 & 5\\ -2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -2\\ 5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7+0 & 5+(-2)\\ -2+5 & 1+4\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$b)\ A-B=\begin{bmatrix}7 & 5\\ -2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -2\\ 5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7-0 & 5-(-2)\\ -2-5 & 1-4\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}7 & 7\\ -7 & -3\end{bmatrix}$$

$$c)\ B+C=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8\\ 6\end{bmatrix}$$

لا يمكن اجراء عملية الجمع لان المصفوفتين ليس لهما نفس الرتبة

- **ضرب المصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :**

عند ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه فإننا نضرب العدد في جميع عناصر المصفوفة أو نقسم العدد على جميع عناصر المصفوفة. مثلاً

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow\ k\,\mathrm{A}=\begin{bmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow\ \frac{A}{k}=\begin{bmatrix}\frac{a}{k} & \frac{b}{k}\\ \frac{c}{k} & \frac{d}{k}\end{bmatrix}$$

مثال / اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ اوجد كلاً مما يأتي

$$a)\ 2A \qquad b)\ 2A + B \qquad c)\ \frac{B}{2}$$

الحل:

$$a)\ 2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 8 \\ 2 \times 1 & 2 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b)\ 2A + B = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$c)\ \frac{B}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} & \frac{-4}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{8}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

• ضرب المصفوفات

ضرب صف في عمود:

حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود وهذا الضرب ليس تبديليا.

$$[a \quad b]\begin{bmatrix} c \\ \\ d \end{bmatrix} = [a \times c + b \times d]$$

فمثلاً

$$[2 \quad 4]\begin{bmatrix} 1 \\ \\ 3 \end{bmatrix} = [2 \times 1 + 4 \times 3] = [2 + 12] = [14]$$

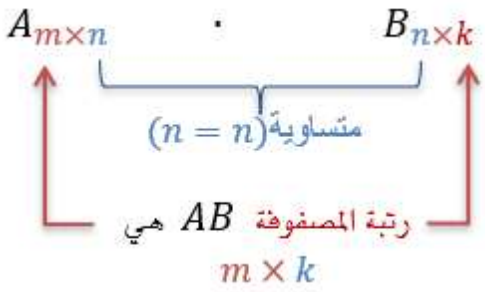
$$[1 \quad 4 \quad 6]\begin{bmatrix} 5 \\ \\ 3 \end{bmatrix}$$ لا يمكن حسابها لان عدد عناصر الصف لا تساوي عدد عناصر العمود

• ضرب مصفوفتين:

حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في مصفوفة من الرتبة $n \times k$ (أي ان عدد أعمدة المصفوفة الأولى تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هي مصفوفة من الرتبة $m \times k$ وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

فمثلا:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$



مثال: اوجد حاصل الضرب للمصفوفتين $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2 \quad 3]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [2 \quad 3]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ [1 \quad 4]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [1 \quad 4]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 7 & 2 \times 6 + 3 \times 8 \\ 1 \times 5 + 4 \times 7 & 1 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + 21 & 12 + 24 \\ 5 + 28 & 6 + 32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$$

- **المحددات:**

إذا كانت A مصفوفة مربعه فإن محدد المصفوفة A هو عبارة عن عدد حقيقي ونرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$

حساب المحددات 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال: اوجد قيمة محدد المصفوفات التالية اذا امكن:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$a)\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times -4) = 6 - (-4) = 6 + 4 =$$

$$= 10$$

$$b)\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

لا يمكن حساب المحددة لأن المصفوفة ليست مربعة

- **حساب المحددات3×3**

المحدد 3×3 للمصفوفة المربعة A هي عبارة عن مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الموازية للقطر الرئيسي(من اعلى الى اسفل)ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية (من اسفل الى اعلى)ونتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على اليمين.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$= (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

مثال: اوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \\ -2 & 5 \end{matrix}$$

$$= ((4 \times 2 \times 1) + (-1 \times 6 \times (-2)) + (3 \times (-3) \times 5)) - ((3 \times 2 \times (-2)) + (4 \times 6 \times 5) + (-1 \times (-3) \times 1))$$

$$= (8 + 12 + (-45)) - ((-12) + 120 + 3) = -25 - 111 =$$

$$= -136$$

الواجب البيتي

1. اذا كانت $B = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ اوجد $\frac{B}{-2}$

2. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

اوجد $3A - 2B$

3. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

اوجد $a)\ A.B$, $b)\ B.A$

المصادر

1. Elementary Linear Algebra – Howard Anton
2. الرياضيات العامة – الجزء الأول المؤلف: د. بشير العبيدي

حل المعادلات الخطية

الاهداف

أن يطبّق الطالب طريقة كرامر لحل أنظمة المعادلات الخطية

الاختبار القبلي

- هل سبق لك أن استخدمت معادلتين لإيجاد مجهولين؟
- متى يكون للمصفوفة حل وحيد؟

• المعادلات الخطية

تعريف: المعادلة الخطية هي التي تكتب على الصورة $ax + b = 0$ حيث ان a, b اعداد حقيقية و $a \neq 0$ ويكون الحل العام $x = \frac{-b}{a}$

• طريقة كرامر.

ليكن لدينا نظام من معادلتين خطيتين ذات مجهولين y و x على الشكل التالي :

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

بحيث ان المعاملات a_1, a_2, b_1, b_1 والثوابت c_1, c_2 اعداد حقيقية فان حل نظام المعادلتين

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D}$$

حيث ان :

محدد النظام D هو المحدد 2×2 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة أي ان:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

محدد مجهول ما هو المحدد ٢×٢ بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة ،أي ان :

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

ملاحظة :

١- اذا كان $D \neq 0$ فان للنظام حل وحيد هو :

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D}$$

٢- اذا كان $D = 0$ فان لدينا حالتين :

- **الحالة الأولى:** اذا كان واحدا على الأقل من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فان النظام مستحيلة الحل.
- **الحالة الثانية :** اذا كانت كل محددات المجاهيل تساوي الصفر فان للنظام عدد لا نهائي من الحلول

مثال: حل نظام المعادلات التالية بطريقة كرامر

$$a) \begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

الحل(a:

أولا: نحسب محدد النظام D:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (1)(5) = 4 - 5 = -1$$

وبالتالي يوجد حل وحيد لان $D = -1 \neq 0$

ثانيا: نحسب محددات المجاهيل Dy و Dx

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (1)(5) = 3 - 5 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (1)(3) = 4 - 3 = 1$$

ثالثا: نوجد قيم y و x

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-1} = 2 \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{-1} = -1$$

ملاحظة : للتأكد من الحل نعوض عن قيمة كلا من قيم y و x في نظام المعادلات.

حل (b:

أولا: نحسب محدد النظام D

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (6)(1) = 6 - 6 = 0$$

ثانيا: نحسب محددات المجاهيل $D\,x$ و $D\,y$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (2)(6) = 12 - 12 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (1)(4) = 4 - 4 = 0$$

بما ان محدد النظام ($D = 0$) ومحددات المجاهيل $Dx = Dy = 0$

اذن للنظام عدد لانهائي من الحلول.

نظام ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل:

تعريف : ليكن لدينا نظام ثلاث معادلات خطية ذات المجاهيل z و y و x على الشكل التالي:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

فان حل هذه النظام: $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$, $z = \frac{D_z}{D}$

بحيث ان المعاملات $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ والثوابت d_1, d_2, d_3 اعداد حقيقية

حيث :

محدد النظام D هو المحدد 3×3 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة أي ان :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

محدد مجهول ما هو المحدد 3× 3 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة ،أي ان :

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{matrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

مثال: حل نظام المعادلات التالية بطريقة كرامر

$$a) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 12 \end{cases}$$

الحل(a:

اولاً: نحسب محدد الجملة D:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 6 + 3 + 4 - 9 - 2 - 4 = -2 \neq 0$$

ثانياً: نحسب محددات المجاهيل $D\ x$ و D y و D z

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 1 \\ 11 & 3 \\ 13 & 2 \end{matrix} = 36 + 13 + 22 - 39 - 12 - 22 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 11 \\ 3 & 13 \end{matrix} = 22 + 18 + 26 - 33 - 13 - 24 = -4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 39 + 33 + 24 - 54 - 22 - 26 = -6$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

الحل (b:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 2 + 6 - 2 - 3 - 1 - (-8) = 10 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \\ 12 & -1 \end{matrix} = 6 + 24 - 5 - 12 - 3 - (-20) = 30$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 12 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{matrix} = 10 - 9 + 24 - 15 - (-12) - 12 = 10$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 12 - 30 - 6 - 9 - (-5) - (-48) = 20$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{30}{10} = 3 \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{10} = 1 \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{20}{10} = 2$$

الواجب البيتي: حل نظام المعادلات التالية بطريقة كرامر

١. $$\begin{aligned} 2x - y &= -9 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

٢. $$\begin{aligned} 6x + 2y + 4z &= 14 \\ 3x + 2y - 8z &= -1 \\ -3x - 6y + 5z &= -10 \end{aligned}$$

المتجهات و الاتجاه

الاهداف

أن يفرّق الطالب بين الكمية المتجهة والقياسية ويحسب طول المتجه

الاختبار القبلي

- ما الفرق بين الكميات المقدارية والكميات الاتجاهية؟
- هل الطول له اتجاه؟

- **المتجهات:**

في هذه المحاضرة سنلقي نظرة مختصرة على المتجهات و بعض خواصها.
سنتناول في هذا المحاضرة
المواضيع الآتية:
١ .المتجهات (بعض المبادئ الأولية).
٢.بعض العمليات على المتجهات.
٣.الضرب العددي.
٤. الضرب ألاتجاهي.

الكميات العددية (scalars) والكميات الاتجاهية.(vectors)

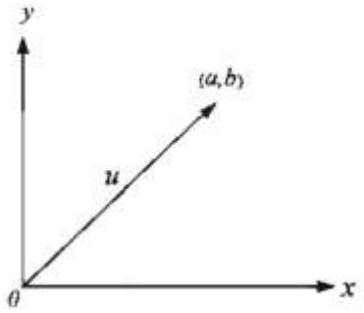
ان معرفة الكميات العددية والاتجاهية امر ا أساسي في الفيزياء، من حيث تحديد طبيعتها وسلوكها وكيفية اجراء العمليات الرياضية عليها، على وجه الخصوص تغير موقعها مع الزمن وتحديد بدايتها ونهايتها والزاوية التي تصنعها مع المحاور المتعامدة.

1-الكميات العددية : Scalars وهي الكميات التي يمكن وصفها من خلال ذكر مقدارها وكذلك وحدة قياسها فقط مثل(الشحنةq ، الحجم V و الكتلة m ....)ويرمز لمقدارها بحروف مجردة.

2-الكميات الاتجاهية : *Vectors* وهي الكميات التي يمكن وصفها بمعرفة مقدارها واتجاهها معا مثل(القوة $\vec{F}$ ، الازاحة $\vec{S}$ والمجال الكهربائي ... $\vec{E}$) وللتميز يرسم فوقها خط او سهم صغير.

- **تمثيل المتجهة**

تمثل الكمية الفيزيائية الاتجاهية بسهم يدل طوله على مقدار الكمية الاتجاهية واتجاهه باتجاه المتجه كما يوضح الشكل ادناه



- **طول المتجه واتجاه المتجة**

ان طول المتجة $\vec{V} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ يتمثل

$$\|\vec{v}\| = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)^{\frac{1}{2}}$$

مثال: جد طول المتجه $\vec{a} = \langle 3, -5, 10 \rangle$

الحل:

$$\|\vec{a}\| = (9 + 25 + 100)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{134}.$$

الاتجاه:

لأي متجه مثل $\vec{A}$ لايساوي صفر نستطيع ايجاد متجه يسمى اتجاه A (Direction of A)

$$Direction\ of\ A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

مثال:

إذا كان المتجه $\vec{B} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ احسب مقدار ووحدة المتجه .

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_X^2 + B_Y^2 + B_Z^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{3} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$$

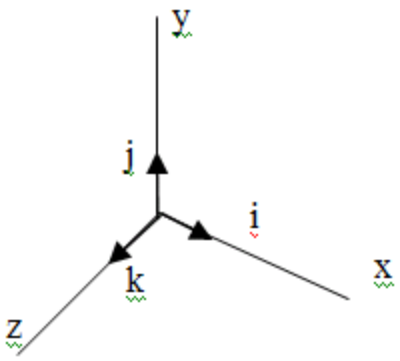
ملاحظة: أذا كان $\|\vec{a}\| = 0$ فأن $\vec{a}$ هو متجه صفري

تعريف: أي متجه طوله يساوي واحد يسمى متجه الوحدة

تعريف: يسمى المتجه $w = \langle 0,0 \rangle$ المتجه الصفري zero vector

ملاحظة:١. في الفضاءات ثلاثية الأبعاد توجد ثلاث متجهات للقاعدة الأساس وهي:

$$\vec{i} = \langle 1,0,0 \rangle \quad , \quad \vec{j} = \langle 0,1,0 \rangle \quad , \quad \vec{k} = \langle 0,0,1 \rangle$$



اما في الفضاءات ثنائية الابعاد يوجد متجهين للقاعدة الأساس هما:

$$\vec{\imath} = \langle 1,0 \rangle \quad , \quad \vec{\jmath} = \langle 0,1 \rangle$$

٢. لا تقتصر المتجهات على الفضاءات ثنائية و ثلاثية الأبعاد بل يتعدى ذلك إلى الفضاءات ذات البعد - n-dimensional space n و تكون متجهاتها بالصيغة:

$$\vec{v} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$$

وان كل a_j تدعى مركبة للمتجه

في دراستنا الحالية سنتعامل مع المتجهات ثنائية و ثلاثية المركبات للسهولة.

- **جبر المتجهات vector algebra**

نبدأ بجمع المتجهات :أن حاصل جمع المتجهين

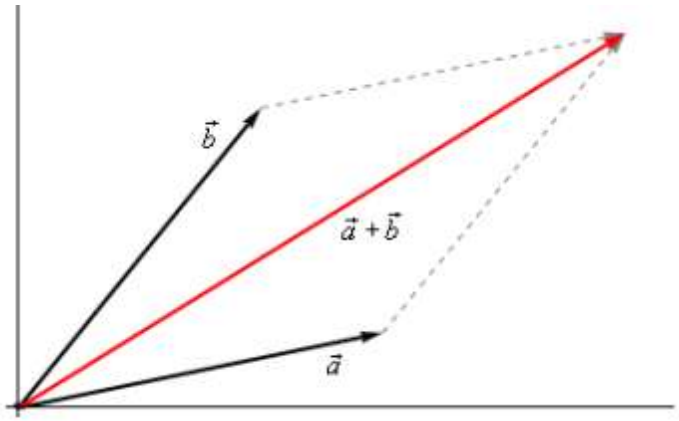
$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \quad \text{و} \quad \vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

أما

يعطى بالصيغة:

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

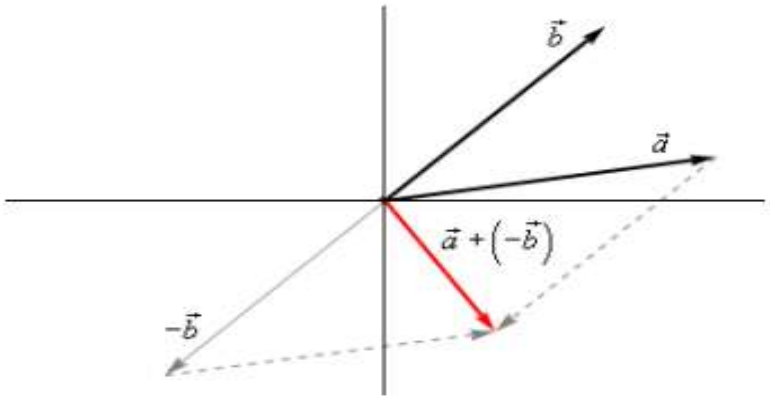
التفسير الهندسي لحاصل جمع متجهين نوضحه بالرسم الآتي و الذي يطلق عليه أحيانا قانون المثلث أو قانون متوازي الأضلاع.



- حسابياً يكون طرح متجهين مشابه لجمعهما

$$\vec{a} - \vec{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

أما التفسير الهندسي لحاصل طرح متجهين نوضحه بالرسم ادنا أي نتعامل مع $\vec{a} - \vec{b}$ بالصورة $\vec{a} + (-\vec{b})$



ملاحظة: لا يمكن أن نجمع أو نطرح متجهين ما لم يكن لهما نفس العدد من المركبات.

مثال: اذا كان $\vec{A} = 5i + 3j + 4k$ و $\vec{B} = i + 2j + 7k$

جد ١) $\vec{A} + \vec{B}$ ٢) $\vec{B} - \vec{A}$

حل١)

$$\vec{A} + \vec{B} = (i + 2j + 7k) + (5i + 3j + 4k)$$

$$= (1 + 5)\mathrm{i} + (2 + 3)j + (7 + 4)k$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 6i + 5j + 11k$$

حل٢)

$$\vec{B} - \vec{A} = (i + 2j + 7k) - (5i + 3j + 4k)$$

$$= (1 - 5)\mathrm{i} + (2 - 3)j + (7 - 4)k$$

$$\vec{B} - \vec{A} = -4i - j + 3k$$

• ضرب المتجهات

١. ضرب المتجه بثابت

عملية ضرب المتجه بثابت فإنها تكون كآلاتي:

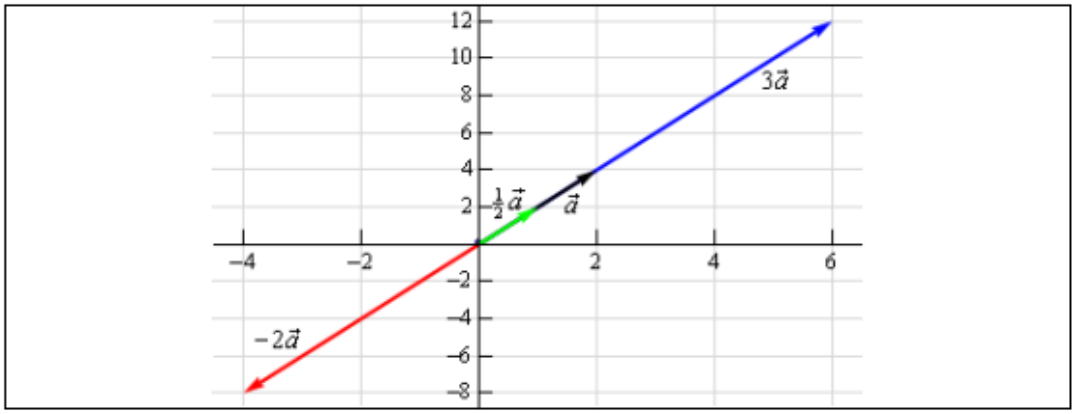
اذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ وان C هو اي ثابت فأن:

$$c\vec{a} = \langle a_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

مثال: $\vec{a} = \langle 2,4 \rangle$ احسب $3\vec{a}, -2\vec{a}, \frac{1}{2}\vec{a}$ ثم ارسم تلك المتجهات على نفس المحورين.

الحل:

$3\vec{a} = \langle 6,12 \rangle$, $\frac{1}{2}\vec{a} = \langle 1,2 \rangle$, $-2\vec{a} = \langle -4,-8 \rangle$



من الرسم أعلاه ما يلي:

- أذا كان الثابت $C > 1$ فان طول المتجه سيزيد.
- أذا كان الثابت $C < 1$ فان طول المتجه سيقل
- أذا كان الثابت $C < 0$ فستغير تجاه المتجه.

٢. الضرب العددي

ليكن كل $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ من متجه فان الضرب العددي او النقطي او الداخلي لهما يكون على الشكل الاتي:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

مثال: احسب الضرب العددي لما يأتي:

$\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{v} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$

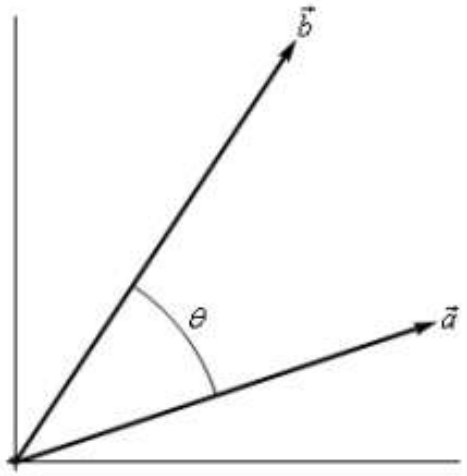
الحل :

$\vec{v}.\vec{w} = 5 * 1 + (-8) * 2$

$\vec{v}.\vec{w} = 5 - 16$

$\vec{v}.\vec{w} = -11$

ملاحظة: يوجد تمثيل هندسي للضرب العددي. لتكن θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بحيث ان $0 < \theta < \pi$ كما في الرسم أدناه:



ملاحظة.

- $\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|cos\theta$
- أن صيغة الضرب النقطي في الصيغة أعلاه لا تستخدم لاستخراج الضرب النقطي لمتجهين و أنما تستخدم لاستخراج الزاوية المحصورة بين المتجهين.

مثال. جد الزاوية بين المتجهين $\vec{a} = \langle 3, -4, -1 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 0,5,2 \rangle$.

الحل. نحتاج إلى الضرب النفطي لاستخراج الزاوية بين المتجهين

$$\vec{a}.\vec{b} = -22,\ \|\vec{a}\| = \sqrt{26},\ \|\vec{b}\| = \sqrt{29}$$

لدينا

$$cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{-22}{\sqrt{26}\sqrt{29}} = -0.8011927$$

و بالتالي ستكون

$$\theta = cos^{-1}(-0.8011927) = 2.5 \text{ radians.}$$

٣. الضرب الاتجاهي cross product

الضرب الاتجاهي لمتجهين يرمز له ب $A \times B$ ويقرأ A cross B ويكون الناتج متجه ثالث ويعرف على انه حاصل الضرب لمقادير المتجهات A ,B و sin الزاوية المحصورة بينهما.

$$\text{A x B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مثال // جد الضرب الاتجاهي للمتجهين

$$\overrightarrow{A} = 3i + 2j + k, \quad \vec{B} = 2i + 2j + 3k$$

الحل//

$$\text{A x B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= i\,(2 * 3 - 1 * 2) - j(3 * 3 - 1 * 2) + k(3 * 2 - 2 * 2)$$

$$= i\,(6 - 2) - j(9 - 2) + k(6 - 4) = 4i - 7j + 2k$$

حيث ان المتجه الناتج من الضرب الاتجاهي A x B يكون عمودي على المستوي الذي يحوي المتجهين A, B

طول المتجه العمودي = مساحة متوازي الاضلاع

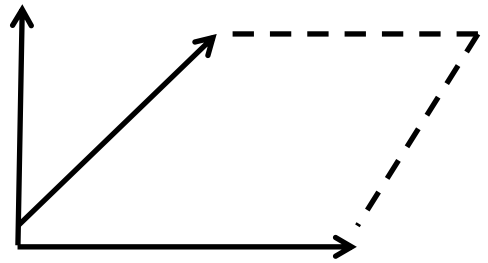
$$|A\ x\ B\ | = \sqrt{(4)^2 + (-7)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 49 + 4} = \sqrt{69}$$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ مساحة متوازي الاضلاع

$$\text{Area of Triangle} = \frac{|A\ x\ B\ |}{2}$$

$$\text{Area of Triangle} = \frac{\sqrt{69}}{2}$$



الواجب البيتي:

إذا كان المتجهين $\bar{A} = 2i + 4j - 5k$ و $\bar{B} = -i + 2j + 6k$ احسب:

1- |A| , |B| 2- A-B , A+B 3- A.B 4- A×B 5- θ between A and B

الدوال المثلثية

الاهداف

أن يعرف الطالب مفهوم الدوال المثلثية والعلاقات بين الدوال المثلثية والمتطابقات والمعادلات المثلثية

الاختبار القبلي

- اذكر بعض الدوال المثلثية الاساسية؟

مفهوم الدالة :

في علم التفاضل والتكامل غالباً ما نتعامل مع العلاقات الموجودة بين المتغيرات مثل المسافة وسرعة الجسم أو المسافة والزمن ، هذا النوع من العلاقات تسمى **الدالة** **Function**

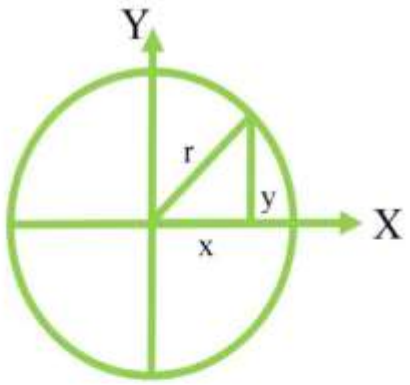
فـــالدالة هي علاقة بين متغيرين ، حالما تعرف قيمة المتغير الأول فأن تمثيل قيمة المتغير الثاني يكون معلوماً أيضـاً كما أن **الدالة** هي مجموعة الإحداثيات لنقاط (x, y) بحيث أن لكل قيمة للمتغير الأول (x) لا توجد إلا قيمة واحدة فقط للمتغير الثاني (y).

الدوال المثلثية للمثلث ستة نسب مثلثية وتسمى **الدوالة المثلثية** لإحتوائه على ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا حيث تُطلق تسمية خاصة على النسبة بين أي ضلعين من أضلاعه وزاوية

Sine ⟹ Sin , Cosine ⟹ Cos, Tangent ⟹ Tan

مجموع زوايا المثلث بالتقدير الستيني $= 180^o$

$$r^2 = x^2 + y^2$$



1) $\sin\theta = \frac{y}{r} \Longrightarrow y = r\sin\theta$

2) $\cos\theta = \frac{x}{r} \Longrightarrow x = r\cos\theta$

3) $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

4) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

5) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

6) $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

العلاقات المثلثية :

1) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

2) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

3) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

4) $\sin(\alpha \mp \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta \mp \cos\alpha\ \sin\beta$

5) $\cos(\alpha \mp \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta \quad \sin\alpha\ \sin\beta$

6) $\tan(\alpha \mp \beta) = \dfrac{\tan\alpha \mp \tan\beta}{1 \quad \tan\alpha\ \tan\beta}$

7) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

8) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$

$= \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$= 2(1 - \sin^2\theta) - 1$

$= 2 - 2\sin^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

9) $\sin^2\theta = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

10) $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

العلاقات المثلثية :

1) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

2) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

3) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

4) $\sin(\alpha \mp \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta \mp \cos\alpha\ \sin\beta$

5) $\cos(\alpha \mp \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta \quad \sin\alpha\ \sin\beta$

6) $\tan(\alpha \mp \beta) = \dfrac{\tan\alpha \mp \tan\beta}{1 \quad \tan\alpha\ \tan\beta}$

7) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

8) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$

$= \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$= 2(1 - \sin^2\theta) - 1$

$= 2 - 2\sin^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

9) $\sin^2\theta = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

10) $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

$$11)\ \sin\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}\left[-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$12)\ \sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$13)\ \cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

المتطابقات المثلثية :

هي علاقة تربط الدوال المثلثية بعضها ببعض ويشترط فيها تساوي الطرفين **الأيمن** و**الأيسر**

مثال (1): أثبت صحة المتطابقة

$$\tan\theta + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \sec\theta$$

الحل (1):

$$\tan\theta + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{\sin\theta(1+\sin\theta)+\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta+1}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \sec\theta$$

مثال (2): أثبت صحة المتطابقة

$$\sec\theta - \sec\theta \sin^2\theta = \cos\theta$$

الحل (2):

$$\begin{aligned}
\sec\theta - \sec\theta \sin^2\theta &= \sec\theta \ (1 - \sin^2\theta) \\
&= \sec\theta \ \cos^2\theta \\
&= \frac{1}{\cos\theta} \ \cos^2\theta \\
&= \cos\theta
\end{aligned}$$

مثال (3): أثبت صحة المتطابقة

$$\sin\theta + \cos\theta \cot\theta = \csc\theta$$

الحل (3):

$$\begin{aligned}
\sin\theta + \cos\theta \cot\theta &= \sin\theta + \cos\theta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= \sin\theta + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin\theta \sin\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{1}{\sin\theta} \\
&= \csc\theta
\end{aligned}$$

المعادلات المثلثية :

وهي المعادلات التي تحتوي على النسب المثلثية وتكون على نوعين:

1) معادلة من الدرجة الثانية ذات النسب المثلثية **الواحدة** وتحل مباشرةً بالتحليل أو بالدستور
2) معادلة من الدرجة الثانية ذات النسب المثلثية **المختلفة** وتحل مباشرةً بالتحليل أو بالدستور

مثال (4): *حل المعادلة المثلثية التالية* $6\sin^2\theta - 5\sin\theta + 1 = 0$

للفترة من 0 إلى π

الحل (4):

$$(3\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$(3\sin\theta - 1) = 0$$

$$3\sin\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{1}{3} \longrightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{1}{3} \longrightarrow \theta = 19.47^\circ$$

$$(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$2\sin\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{1}{2} \longrightarrow \theta = 30^\circ$$

$\theta = 19.47^\circ$

$\theta = 30^\circ$

} في الربع الأول

$\theta = 180^\circ - 19.47^\circ = 160.53^\circ$

$\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

} في الربع الثاني

مثال (5): حـل المعادلة المثلثية التالية $4\cos^2\theta - 4\sin\theta = 1$

للفترة من $0°$ إلى $90°$

الحـل (5):

$$4\cos^2\theta - 4\sin\theta - 1 = 0$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$4(1 - \sin^2\theta) - 4\sin\theta - 1 = 0$$

$$4 - 4\sin^2\theta - 4\sin\theta - 1 = 0$$

$$-4\sin^2\theta - 4\sin\theta + 3 = 0 \longrightarrow * -1$$

$$4\sin^2\theta + 4\sin\theta - 3 = 0$$

$$(2\sin\theta + 3)(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$(2\sin\theta + 3) = 0$$

$$2\sin\theta = -3 \longrightarrow \sin\theta = \frac{-3}{2} \longrightarrow \text{يُهمل}$$

$$(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$2\sin\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{1}{2} \longrightarrow \theta = 30° \quad \text{في الربع الأول}$$

واجب بيتي Home Work :

أثبت صحة المتطابقات المثلثية التالية :

1) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta * \sin^2\theta$

2) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

الغايات

الاهداف

أن يدرك الطالب مفهوم الغاية كوسيلة لتحليل سلوك الدالة عند نقطة معينة ويفهم كيف تستخدم النهايات في وصف التغيرات المفاجئة في الاشارات الكهربائية مثل التيار او الجهد عند لحظة فتح اوغلق دائرة كهربائية

الاختبار القبلي

-ما هو مفهوم الغاية؟

- اذا اقتربت قيمة x من 2 هل تتوقع ان تقترب الدالة من رقم معين ايضا؟

١.تعريف مفهوم الغاية

الغاية هي أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات وبشكل خاص في التفاضل والتكامل و التحليل الرياضي يقصد بغاية الدالة $f(x)$ هو التعبير عن سلوك الدالة f عندما يقترب متغير الدالة x من قيمة معينة ولتكن a يعبر عن الغاية رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x\to a} f(x) = C$$

C : عدد حقيقي يمثل غاية الدالة او نهاية الدالة تقرأ نهاية او غاية الدالة $f(x)$ هي C عندما x تؤول او تقترب الى a.

اذا كانت الغاية من جهة اليمين يعبر عنها رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = C_1$$

واذا كانت الغاية من جهة اليسار يعبر عنها رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = C_2$$

فأن غاية الدالة $f(x)$ تكون موجودة اذا كان $C_1 = C_2$ وتكون غاية الدالة $f(x)$ غير موجودة

اذا كان $C_1 \neq C_2$.

مثال (1) اوجد غاية الدالة $f(x) = x^2 - 1$ عندما $x \to 0$.

الحل:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 - 1 = (0)^2 - 1 = -1$$

مثال (2) اوجد غاية الدالة $f(x) = 3x + 2$ عندما $x \to 1$ ن 0.

الحل:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x + 2 = 3(1) + 2 = 5$$

٢.خواص الغايات

اذ ❖ **الخاصية الثانية: الغاية تتوزع على عملية الجمع والطرح للدوال**

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = C$$

وكانت غاية الدالة $g(x)$

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = L$$

وكانت $n\ ,m\ ,z$ ثوابت فأن الخواص التالية تكون متحققة

❖ **الخاصية الاولى: غاية الدالة الثابتة تساوي الثابت نفسه**

$$\lim_{x\to a} z = z \quad , \quad f(x) = z$$

مثال (3): اوجد الغاية للدوال التالية

$$\lim_{x\to 1} 8 = 8$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\mp g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \mp \lim_{x\to a} g(x) = C \mp L$$

مثال(4): اوجد الغاية للدالة كثيرة الحدود التالية

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 + 6x + 8)$$

حسب الخاصية الثانية يتم ادخال الغاية على كل حد من حدود الدالة

$$= \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2} 6x + \lim_{x\to 2} 8$$

ثم يتم تعويض القيمة (2) التي يؤول اليها المتغير x في الدالة

$$= 3(2)^2 + 6(2) + 8$$

$$= 12 + 12 + 8$$

$$= 32$$

بما ان غاية الدالة موجودة اذن الغاية من جهة اليمين تساوي الغاية من جهة اليسار.

❖ الخاصية الثالثة: الغاية تتوزع على عملية الضرب لدالتين

$$\lim_{x\to a}(f(x) * g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x) = C * L$$

مثال(5) اوجد الغاية للدالة التالية

ثم يتم تعويض القيمة (2) التي يؤول اليها المتغير x في الدالة

$$\lim_{x-} = (2+1) * ((2)^2 - 1)$$

$$= 3 * (4-1)$$

$$= = 3 * 3$$

$$= 9$$

❖ **الخاصية الرابعة: الغاية لثابت مضروب في دالة يساوي الثابت في غاية الدالة**

$$\lim_{x \to a} z\, f(x) = z \lim_{x \to a} f(x) = zC$$

مثال (6) اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x \to 3} 9(x^2 - x)$$

حسب الخاصية الرابعة يتم ادخال الغاية على الدالة فقط واخراج الثابت خارج الغاية

$$= 9 \lim_{x \to 3} (x^2 - x)$$

$$= 9((3)^2 - 3)$$

$$= 9(9-3)$$

$$= 9 * 6$$

$$= 54$$

❖ **الخاصية الخامسة: الغاية تتوزع على حاصل قسمة دالتين**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{C}{L}$$

مثال(7) اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 6}\frac{x+2}{x-3}$$

حسب الخاصية الخامسة يتم توزيع الغاية على دالة البسط ودالة المقام

$$=\frac{\lim_{x\to 6}x+2}{\lim_{x\to 6}x-3}$$

$$=\frac{6+2}{6-3}$$

$$=\frac{8}{3}$$

❖ **الخاصية السادسة: الغاية لدالة مرفوعة للأس**

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{\frac{n}{m}}=(\lim_{x\to a}f(x))^{\frac{n}{m}}=C^{\frac{n}{m}}$$

مثال(8) اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - x + 4)^{\frac{2}{3}}$$

حسب الخاصية السادسة يتم ادخال الغاية على الدالة داخل القوس المرفوع للأس

$$= \left(\lim_{x\to 3}(x^2 - x + 4)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= (\lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 4)^{\frac{2}{3}}$$

$$= ((3)^2 - 3 + 4)^{\frac{2}{3}}$$

$$= (10)^{\frac{2}{3}}$$

❖ **الخاصية السابعة: الغاية لدالة تحت الجذر**

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

مثال(9) اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2-2}$$

حسب الخاصية السابعة يتم ادخال الغاية على الدالة داخل الجذر التربيعي

$$=\sqrt{\lim_{x\to 4}(x^2-2)}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 4}x^2-\lim_{x\to 4}2}$$

$$=\sqrt{((4)^2-2)}$$

$$=\sqrt{16-2}$$

$$=\sqrt{14}$$

***بعض الملاحظات حول ايجاد غاية الدالة**

لغرض الوصول الى غاية الدالة $f(x)$ يتم تعويض قيمة a التي يؤول اليها المتغير x في الدالة f كما في الامثلة السابقة ويكون ناتج التعويض اما كمية محددة (معرفة) عندها ينتهي الحل او يكون ناتج التعويض كمية غير محددة (غير معرفة) مثل $\frac{\infty}{\infty}$ او $\frac{0}{0}$ هذه الحالة تظهر

عادةً في الدوال الكسرية التي يكون فيها كل من البسط والمقام عبارة عن دوال متعددة الحدود ولغرض ايجاد حل لهذه الحالات نطبق الاتي:

1. اذا كان ناتج التعويض يساوي $\frac{0}{0}$ نقوم بأحد الاجراءات التالية:

أ- نحلل البسط والمقام بأحد طرق التحليل (الفرق بين مربعين ، التجربة ، الفرق بين مكعبين ، مرافق الجذر)

ب- نستخدم القانون التالي اذا كان يلائم السؤال

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

2. اذا كان ناتج التعويض يساوي $\frac{\infty}{\infty}$ وكان أس x في المقام اكبر او تساوي أس x في البسط نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على x المرفوعة لاكبر أس في المقام، أما اذا كان أس x في البسط اكبر من أس x في المقام فنقوم بقسمة كل من البسط والمقام على x المرفوعة لاكبر أس في البسط.

مثال (10) اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

حسب الخاصية الخامسة يتم توزيع الغاية على البسط والمقام

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-1}{\lim\limits_{x\to 1}x-1}$$

$$=\frac{(1)^2-1}{1-1}$$

$$= \frac{0}{0}$$

بما ان ناتج التعويض $\frac{0}{0}$ يجب ان نحلل الدالة للوصول الى غاية الدالة يكون التحليل بأستخدام قانون الفرق بين مربعين

$$(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1)$$

$$1 + 1 = 2$$

الواجب البيتي

جد غاية الدوال التالية:

1) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

2) $\lim_{x \to \infty} (\frac{x}{7x + 4})$

التفاضل

الاهداف

أن يتقن الطالب قواعد الاشتقاق الأساسية.

الاختبار القبلي

-ما هي مشتقةx^n ؟

-هل الاشتقاق يعبر عن التغير؟

قواعد المشتقة

١ـ مشتقة الثابت = صفر

مثال / جد المشتقة للدوال الآتية

1- $f(x) = 6 \Longrightarrow f'(x) = 0$

2- $f(x) = \sqrt{5} \Longrightarrow f'(x) = 0$

3- $f(x) = a \Longrightarrow f'(x) = 0$

٢ـ مشتقة المتغير $f(x) = x^n$ $\quad f'(x) = nx^{n-1}$ $\quad f(x) = x^2$

مثال / جد المشتقة للدوال الآتية

1) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$

2) $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$

3) $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$

4) $f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3$

5) $f(x) = x^5 \Longrightarrow f'(x) = 5x^4$

6) $f(x) = 2x \Longrightarrow f'(x) = 2$

7) $f(x) = 3x^2 \Longrightarrow f'(x) = 6x$

8) $f(x) = 5x^3 \Longrightarrow f'(x) = 15x^2$

9) $f(x) = x^{-2} \Longrightarrow f'(x) = -2x^{-3}$

10) $f(x) = x^{-3} \Longrightarrow f'(x) = -3x^{-4}$

11) $f(x) = x^{-4} \Longrightarrow f'(x) = -4x^{-5}$

12) $f(x) = 3x^{-5} \Longrightarrow f'(x) = -15x^{-6}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مشتقة الجذور

1) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

4) $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

6) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x^{-2}} = x^{-\frac{2}{3}} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$

٣ـ مشتقة دوال كثيرة الحدود

$$f(x) = h(x) \mp g(x) \Longrightarrow f'(x) = h'(x) \mp g'(x)$$

1) $f(x) = 3x^5 + 7x \Longrightarrow f'(x) = 15x^4 + 7$

2) $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 6 \Longrightarrow f'(x) = 12x^3 - 8x$

3) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x \Longrightarrow f'(x) = 4x + \frac{1}{2}$

4) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 9 \Longrightarrow f'(x) = x - 4x^2$

5) $f(x) = \frac{1}{5}x^{-2} - \frac{2}{7}x^{-3} + 9 \Longrightarrow f'(x) = \frac{-2}{5}x^{-3} + \frac{6}{7}x^{-4}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤. مشتقة حاصل ضرب دالتين = الاولى في مشتقة الثانية + الثانية في مشتقة الاولى

$$f(x) = g(x).h(x) \longrightarrow f'(x) = g(x).h'(x) + h(x).g'(x)$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$

الحل /

$$f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$$
$$f'(x) = (x^4 - x^2 + 1)(30x^5 - 3) + (5x^6 - 3x)(4x^3 - 2x)$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$ عند $x = 2$

الحل /

$$f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$$
$$f'(x) = (4 - x)(2x) + (x^2 + 3)(-1)$$
$$f'(2) = (4 - 2)(2(2)) + (2^2 + 3)(-1) = 2(4) + (7)(-1) = 8 - 7 = 1$$

---

٥. مشتقة حاصل قسمة دالتين $= \frac{\text{المقام في مشتقة البسط - البسط في مشتقة المقام}}{\text{المقام}^2}$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{h(x).g'(x) - g(x).h'(x)}{(h(x))^2}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = \frac{x^3+1}{x^4+1}$ عند $x = 1$

الحل/

$$f'(x) = \frac{(x^4+1)(3x^2) - (x^3+1)(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(1^4+1)(3\times1^2) - (1^3+1)(4\times1^3)}{(1^4+1)^2} = \frac{2\times3 - 2\times4}{2^2} = \frac{6-8}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x)=\frac{4-5x}{x^2+x+1}$ عند $x=-1$

الحل/

$$f'(x)=\frac{(x^2+x+1)(-5)-(4-5x)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(-1)=\frac{((-1)^2+(-1)+1)(-5)-(4-5(-1))(2(-1)+1)}{((-1)^2+(-1)+1)^2}$$

$$f'(-1)=\frac{(1-1+1)(-5)-(4+5)(-2+1)}{(1-1+1)^2}=\frac{-5-(9)(-1)}{1}=-5+9=4$$

---

٦ - مشتق القوس مرفوعة الى أس = الاس في القوس مرفوع الى الأس -١ في مشتقة داخل القوس

$$f(x)=[h(x)]^n \Longrightarrow f'(x)=n[h(x)]^{n-1}(h'(x))$$

مثال / جد المشتقة الدوال الآتية $f(x)=(1-x)^3$

الحل /

$$f'(x)=3(1-x)^2(-1)=-3(1-x)^2$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x)=(x^3+x^2+x+1)^5$

الحل /

$$f'(x)=5(x^3+x^2+x+1)^4(3x^2+2x+1)$$

مثال / اذا كانت $f(x)=(x^2-3)^4$ جد $f'(x)$, $f''(x)$ عند $x=2$

الحل /

$$f'(x)=4(x^2-3)^3(2x)=8x(x^2-3)^3$$

$$f'(2)=8(2)(2^2-3)^3=16(1)^3=16$$

$$f''(x)=8x(3)(x^2-3)^2(2x)+(x^2-3)^3(8)$$

$$f''(x)=48x^2(x^2-3)^2+8(x^2-3)^3$$

$$f''(2)=48(2)^2(2^2-3)^2+8(2^2-3)^3=192+8=200$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظة / مشتقة الجذر التربيعي = مشتقة داخل الجذر على ٢في الجذر

$$f(x)=\sqrt{\quad} \longrightarrow f'(x)=\frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\sqrt{\quad}}$$

مثال / اذا كانت $f(x)=\sqrt{x^3+x^2-5}$ جد $f'(x)$

الحل /

$$f'(x)=\frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2-5}}$$

مثال / اذا كانت $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ جد $f'(x)$

الحل /

$$f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+1}}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $y=x^4+5x^3+3$ جد y' , y''

الحل

$$y'=4x^3+15x^2$$
$$y''=12x^2+30x$$

مثال /اذا كانت $f(x)=2x^3+4+\frac{3}{x}$ جد $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f''(-1)$

الحل/

$$f(x)=2x^3+4+3x^{-1}$$

$$f'(x)=6x^2-3x^{-2} \Longrightarrow f'(x)=6x^2-\frac{3}{x^2}$$

$$f''(x)=12x+6x^{-3} \Longrightarrow f''(x)=12x+\frac{6}{x^3}$$

$$f''(-1)=12(-1)+\frac{6}{(-1)^3}=-12-6=-18$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ عند $x=0$

الحل /

$$f(x)=(2x+1)^{\frac{-1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2}(2x+2)^{\frac{1}{2}}(2)=-\sqrt{2x+1}$$

$$f'(0)=-\sqrt{2(0)+1}=-\sqrt{1}=-1$$

س٣ / جد المشتقة للدالة $f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^4$ عند $x=1$

الحل /

$$f'(x)=4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3\left(\frac{(x+1)(1)-x(1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(1)=4\left(\frac{1}{1+1}\right)^3\left(\frac{(1+1)(1)-1(1)}{(1+1)^2}\right)$$

$$f'(1)=4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{2-1}{4}\right)=4\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x)=x+\frac{3}{x^2+1}$ عند $x=-1$

الحل /

$$f'(x)=1+\frac{-3(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=1-\frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(-1)=1-\frac{6(-1)}{((-1)^1+1)^2}=1+\frac{6}{(2)^2}$$

$$=1+\frac{6}{(2)^2}=1+\frac{6}{4}=\frac{4+6}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

س٣/ اذا كانت $f(x)=(x^3+3x^2-3)^{\frac{3}{2}}$ $f'(x)$, $f'(2)$

الحل /

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x^3+3x^2-3)^{\frac{1}{2}}(3x^2+6x)=\frac{3}{2}(3x^2+6x)\sqrt{x^3+3x^2-3}$$

$$f'(2)=\frac{3}{2}(3(2)^2+6(2))\sqrt{2^3+3(2)^2-3}$$

$$=\frac{3}{2}(12+12)\sqrt{8+12-3}=\frac{3}{2}(24)\sqrt{17}=36\sqrt{17}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مشتقات الدوال الدائرية

$$1)\ \frac{d}{dx}(\sin y) = \cos y \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\sin 5x$

الحل / $\frac{d}{dx}\sin 5x = \cos 5x \cdot 5 = 5\cos 5x$

$$2)\ \frac{d}{dx}(\cos y) = -\sin y \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\cos \frac{x}{2}$

الحل / $\frac{d}{dx}\cos \frac{x}{2} = -\sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}$

$$3)\ \frac{d}{dx}(\tan y) = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\tan x^2$

$\frac{d}{dx}\tan x^2 = \sec^2 x^2 (2x) = 2x \sec^2 x^2$

$$4)\ \frac{d}{dx}(\cot y) = -\csc^2 y \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\cot 8x$

$\frac{d}{dx}\cot 8x = -\csc^2 8x \cdot 8 = -8\csc^2 8x$

$$5)\ \frac{d}{dx}(\sec y) = \sec y \tan y \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\sec 4x$

الحل $\frac{d}{dx}\sec 4x = sec\ 4x\ tan\ 4x \cdot 4 = 4sec\ 4x\ tan\ 4x$

$$6)\ \frac{d}{dx}(\csc y) = -\csc y \cot y \frac{dy}{dx}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال / جد $\frac{d}{dx}\csc 5x$

الحل /

$$\frac{d}{dx}\csc 5x = -csc\ 5x\ cot\ 5x \cdot 5 = -5csc\ 5x\ cot\ 5x$$

مثال / اذا كانت $f(x) = \text{Sin}(7x^2 + 4x + 1)$ جد $f'(x)$

الحل /

$$f'(x) = \cos(7x^2 + 4x + 1)(14x + 4)$$
$$= (14x + 4)\cos(7x^2 + 4x + 1)$$

مثال / اذا كانت $f(x) = \text{Sin}\sqrt[3]{x}$ جد $f'(x)$

الحل /

$$f(x) = \text{Sin}\ x^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow \quad f'(x) = \cos x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cos\sqrt[3]{x}$$

مثال / اذا كانت $f(x) = \cos^3 7x$ جد $f'(x)$

$$f'(x) = 3\cos 2\ 7x\ (-\sin 7x \cdot 7)$$
$$f'(x) = -21\cos 2\ 7x \sin 7x$$

مثال / اذا كانت $f(x) = \cos 3x - \tan 5x + \sec 4x$ جد $f'(x)$

$$f'(x) = -3\sin 3x - 5\sec^2 5x + 4\sec 4x \tan 4x$$

مثال / اذا كانت $f(x) = (\text{Sec } 5x)^3$ جد $f'(x)$

الحل /

$$f'(x) = 3(\text{Sec } 5x)^2\ (\sec 5x \tan 5x)\ 5 = 15\sec^3 5x \tan 5x$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اسئلة محلوله

س١ / اذا كانت $y = \text{Sin}(5 - x^3)$ جد y'

$$y' = \cos(5 - x^3)(-3x^2) = -3x^2 \cos(5 - x^3)$$

س٢ / اذا كانت $y = \sqrt{cos(4x + 2)}$ جد y'

الحل /

$$y' = \frac{-sin\,(4x+2)(4)}{2\sqrt{cos(4x+2)}} = \frac{-2\,sin(4x+2)}{\sqrt{cos(4x+2)}}$$

س٣ / اذا كانت $y = x\,\text{Sec}\,x^2$ جد y'

الحل /

$$y' = x\,\text{Sec}\;x^2 \tan x^2\,(2x) + \sec x^2\,(1) = 2x^2\,\text{Sec}\,x^2 \tan x^2 + \sec x^2$$

س٤ / اذا كانت $y = \text{Sin}\,3x \cos 3x$ جد y'

$$y' = \text{Sin}\,3x\,(-\sin 3x)\,(3) + \cos 3x \cos 3x\,(3) = -3\text{Sin}^2\,3x + 3\cos^2 3x$$

س٥ / اذا كانت $y = \sqrt[3]{cot^2\,4x}$ جد y'

الحل /

$$y = (cot^2\,4x)^{\frac{1}{3}} = (cot\,4x)^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{2}{3}(cot\,4x)^{-\frac{1}{3}}(-csc\,4x)(4) = \frac{-8csc\,4x}{3\sqrt[3]{cot\,4x}}$$

س٦ / اذا كانت $y = \csc^5 (x^2 + 1)$ جد y'

الحل /

$$y' = 5\csc^4 (x^2 + 1)[-\csc (x^2 + 1) \cot (x^2 + 1)]\,(2x)$$

$$= -10\csc^5 (x^2 + 1) \cot (x^2 + 1)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

س٧ / أذا كانت $y = (\text{Sin } 3x - \cos 3x)^2$ جد y'

الحل /

$$y = \text{Sin}^2 3x - 2 \sin 3x \cos 3x + \cos^2 3x$$

$$y = \text{Sin}^2 3x + \cos^2 3x - 2 \sin 3x \cos 3x$$

$$y = 1 - \sin 6x$$

$$y' = -\cos 6x\,(6) = -6 \cos 6x$$

س٨/ اثبت صحة $\frac{d}{dx}[\sin ax - \frac{1}{3}\sin^3 ax] = a\cos^3 ax$

الحل /

$$\frac{d}{dx}[\sin ax - \frac{1}{3}\sin^3 ax] = \cos ax \cdot a - sin^2 ax \cdot \cos ax \cdot a$$
$$= a\cos ax - asin^2 ax \cos ax$$
$$= a \cos ax\,(1 - six^2 ax)$$
$$= a \cos ax\, \cos^2 ax = a \cos^3 ax$$

س٩ / اثبت صحة $\frac{d}{dx}(\frac{2-\cos x}{2+\cos x}) = \frac{4 \sin x}{(2+\cos x)^2}$

الحل

$$L \cdot H = \frac{d}{dx}(\frac{2-\cos x}{2+\cos x}) = \frac{(2+\cos x)(\sin x)-(2-\cos x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$$
$$= \frac{2 \sin x + c \cos x \sin x + 2 \sin x - \cos x \sin x}{(2+\cos x)^2}$$
$$= \frac{4 \sin x}{(2+\cos x)^2}$$

س١٠/ اذا كانت $y = \cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 8 \sin 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 16 \cos 2x$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner