المشتقات ((Derivatives))

اذا كان لدينا المشتقة لدالة معينة ولتكن (f) فان مشتقتها هي دالة اخرى يرمز لها $(f)^{/}$ بحيث ان قيمتها في كل عدد (x)هي في منطلق الدالة (f) و تقرا $[f(x)]^{/}$ وهي مشتقة الدالة $[f(x)]$.

وهنالك رموز كثيرة لمشتقة الدالة عندما يكون المتغير لها

(x) والدالة لها (y) : $\frac{dy}{dx}$ او $\frac{df(x)}{dx}$ او $y^{/}$ او $f(x)^{/}$

واذا كانت الدالة عند النقطة $(x = a)$ *موجودة :*

عند اذن يقال بان الدالة قابلة للاشتقاق . وهذا النوع من الاشتقاق يسمى المشتقة الاولى للدالة و هنالك المشتقة الثانية و الثالثة .....

قاعدة عامة

1: IF $f(x) = k$ then $f(x)^{/} = 0$

2: IF $f(x) = x$ then $f(x)^{/} = 1$

3: IF $f(x) = k \cdot g(x)$ then $f(x)^{/} = k \cdot g(x)^{/}$

4: IF $f(x) = x^n$ then $f(x)^{/} = ((n\, x^{n-x}))$ $n \in R$

5: $y = [f(x)]^n$ then $y^{/} = n [f(x)]^{n-1} \cdot f(x)^{/}$

6: $f(x) = h(x) \mp g(x)$ then $f(x)^{/} = h(x)^{/} \mp g(x)^{/}$

7: $f(x) = h(x) * g(x)$ then $f(x)^{/}$

$= [h(x) * g(x)^{/}] + [g(x) * h(x)^{/}]$

8: IF $f(x) = h(x) / g(x)$ then $h(x)^{/}$

$= [g(x) \cdot h(x)^{/}] - [h(x) \cdot g(x)^{/}] / [g(x)]^2$

****

انـــواع مـشـتـقـات الـدوال

النوع الأول: مـشـتـقة الـدالة الـجـبـريـة

جـــد المشتقة للدوال التالية :

1: $y = 4$ ''''' $y' = 0$

2: $y = x + 1$ ''''' $y' = 1$

3: $y = x^5$ ''''''' $y' = 5\,x^4$

4: $y = 5\,x^3$ ''''''' $y' = 5 * (3\,x^2)$

$= 15\,x^2$

5: $y = x^5 - 2\,x^{-3} + x - 5$

$y' = 5x^4 - [\ 2* (-3)* x^{-4}\ ] + 1 - 0$

$= 5x^4 + 6x^{-4} + 1$

6: $y = (x - 2) / (x + 3)$

$y' = [\ (x+3)* (1)\ ] - [\ (x-2) * (1)\ ] / (x+3)^2$

$= [\ x + 3 - x + 2\ ] / (x+3)^2$

$= 5 / (x+3)^2$

7: $y = (x - 2) * (x + 3)$

$y' = (x - 2) * (1) + (x + 3) * (1)$

$= (x - 2 + x + 3)$

$= 2x + 1$

8: $y = (x^2 + 2x - 3)^3$

$y' = 3* (x^2 + 2x - 3)^2 * (2 x +2)$

$= 3^* (x^2 + 2x - 3)^2 * 2 (x + 1)$

$= 6 (x^2 + 2x - 3)^2 (x + 1)$

****

النوع الثاني : مشتقة الدالة الضمنية

<u>قـــاعـــدة :</u>

$$\frac{d}{dx} * (x^m * y^n) =$$

$$\left[n * x^m * y^{n-1} * \frac{dy}{dx} \right] + [m * x^{m-1} * y^n]$$

****

// تعطى الدالة الضمنية على شكل متطابقة .

// تشتق الحدود على حسب المتغيرات .

// مشتقة (y)هي$(y)^/$=(dy/dx) , او حسب المتغير الثاني المعطى في السؤال.

// <u>نضع الحدودالتي تحوي مشتقة في جهة والحدود الاخرى في</u> الجهة الاخرى ثم نقسم على معامل< $dy/dx = (y)^/$ > لنحصل على نتيجة المشتقة النهائية .

<u>*جـــد المشتقة الضمنية للدوال التالية $dy/dx = (y)^/$</u>

1\ $x^2 + y^2 + 5 = 30$

$2x + 2y\, y^/ + 0 = 0$

$(- 2) x = 2y\, y^/$

$\therefore y^/ = - 2x / 2y$ ..... <u>$y^/ = - x / y$</u>

2\ $16 x^2 - 9 y^2 = 144$

$32 x - 18 y\, y^/ = 0$ ..... $32 x = 18 y\, y^/$

$y^/ = 32 x / 18 y$ ..... <u>$y^/ = 16x / 9y$</u>

$3\backslash\ y^2 + x^2\, y = 3\, x^3$

$2\, y\, y' + x^2\, y' + 2xy = 9\, x^2$

$y'(2y + x^2) = 9\, x^2 - 2\, xy$

$$y' = \frac{9\ x^2 - 2xy}{2y + x^2}$$

النوع الثالث : اشتقاق الدالة الاسية

قاعدة عامة:

$$e^{x1} * e^{x2} = e^{x1+x2}$$

$$\frac{e^{x1}}{e^{x2}} = e^{x1-x2}$$

$$\frac{1}{e^{x}} = e^{-x}$$

$$(e^{x1})^{x2} = e^{x1\,.x2}$$

****

قاعدة الاشتقاق :

$$\frac{d\,(e)^{u}}{dx} = e^{u} * \frac{du}{dx}$$

****

جـــد المـــشـــتـــقـــة :

1\ y = e^{x^2+3x}

y/ = e^{x^2+3x} * (2x + 3)

2 \ y = $e^{e^{-x}}$

y/ = $e^{e^{-x}}$ * e^{-x} * (-1)

= (- $e^{e-x\,-x}$)

3 \ y = e^{x^2} * 2x

y/ = e^{x^2} * 2 + 2x * e^{x^2} * 2x

= 2 * e^{x^2} + 4x * e^{x^2}

= 2 e^{x^2} (1 + 2 x^2)

4 \ y = $e^{x^{\frac{1}{2}}}$

y/ = $e^{x^{\frac{1}{2}}}$ * $x^{\frac{1-}{2}}$ * $\frac{1}{2}$

= $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

****

النـــوع الـــرابـــع : مشـتـقـة الـدوال الـلـوغـارتـمـيـة

<u>قـــاعـــدة :</u>

$$\frac{d}{dx} * \ln u = \frac{1}{u} * \frac{du}{dx}$$

****

جـــد الـمشتقة للدوال اللوغارتمية للتالية :

1 \ y = $\ln x$

y/ = 1 / x

2 \ y = ln (3 x^2 + 5)

$y' = \frac{1}{(3x^2+5)} * 6x$

$3 \setminus y = \ln\sqrt{5+3x}$

$y = \ln(5+3x)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{\frac{1}{2} * (5+3x)^{\frac{-1}{2}} * 3}{(5+3x)^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{3}{2 * (5+3x)^{\frac{1}{2}} * (5+3x)^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{3}{2(5+3x)}$

$4 \setminus y = \ln(x^2 - 2) + \ln(x^5 - 7x^2)$

$y' = \frac{2x}{x^2-2} + \frac{(5x^4-14x)}{(x^5-7x^2)}$

****

النـــوع الـخأمـس : مـشتـقـة الـدوال الـمـثـلـيـة

<u>قـاعـدة :</u>

$\sin u$ ..... $y' = \cos u \quad (u)' \quad y = \dot{y} =$

$\tan u$ ..... $y' = -\sec^2 u \quad (u)'$

$y = y = \cos u$ ..... $y' = -\sin u \quad (u)'$

$\cot u$ ..... $y' = -\csc^2 u \quad (u)'$

$y = \sec u$ ..... $y' = \tan u \sec u \quad (u)'$

$y = \csc u$ ..... $y' = -\csc u \cot u \quad (u)'$

جـــد الـمـشتـقـة للـدوال الـمـثـلـثـيـة :

1\ y = $\sin x^2$

$y^{/} = \cos x^2 \quad 2x$

2\ y = $\sin 3x$

$y^{/} = \cos 3x \ . \ 3$

3\ y = $\tan(x^3 + 1)$

$y^{/} = \sec^2(x^3 + 1) \ * \ 3x^2$

4\ y = $\sec e^{\sin x}$

$y^{/} = \quad 1 * \cos x * e^{\sin x} * \sec e^{\sin x} * \sec e^{\sin x}$

5\ y = $\sqrt{\cot(4x + 1)}$

$y^{/} = \frac{1}{2} * (\cot 4x + 1)^{-0.5} * -\csc^2(4x + 1) * 4$

$= - \frac{\csc^{-1}(4x+1)}{\sqrt{\cot(4x+1)}} * 2$

6\ y = $e^{x^2} * \ln(x^2 * \sin x)$

$y^{/} = e^{x^2} * \frac{x^2 * \cos x + \sin x * 2x}{x^2 * \sin x} + \ln(x^2 * \sin x) * e^{x^2} * 2x$

الـنوع الـسادس : مـشـتـقـة الـدوال الـزائـديـة

<u>قـــاعـــدة:</u>

$y = \sinh u \ \ldots\ldots \ y^{/} = \cosh u \ u^{/}$

$y = \cosh u \ \ldots\ldots \ y^{/} = \sinh u \ u^{/}$

$$y = \tanh u \ldots\ldots \quad y' = \operatorname{sech}^2 u \quad u'$$

$$y = \operatorname{sech} u \ldots\ldots \quad y' = -\operatorname{sech} u \tanh u \quad u'$$

$$y = \operatorname{csch} u \ldots\ldots \quad y' = -\coth u \operatorname{csch} u \quad u'$$

$$y = \coth u \ldots\ldots \quad y' = -\operatorname{csch}^2 2 \quad u'$$

****

جد مشتقة الدوال الزائدية التالية :

1\ $y = x * \operatorname{sech}^2(x^3 + 3x - 1)$

$y' = (x) *\{ [(-2) \operatorname{sech}(x^3 + 3x - 1) * \operatorname{sech}(x^3 + 3x - 1) * \tanh(x^3 + 3x - 1)] *(3x^2+3) \} + \{ \operatorname{sech}^2(x^3 + 3x - 1) * (1) \}$

$= \{ -x *(2) \operatorname{sech}^2(x^3 + 3x - 1) *\tanh(x^3 + 3x - 1) * (3)* (x^2+1) \} + \{ \operatorname{sech}^2(x^3 + 3x - 1) \}$

$= \operatorname{sech}^2(x^3 + 3x - 1) [-6x * \tanh(x^3 + 3x - 1) *(x^2+1)] + [1]$

2\ $y = \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2}$

$y' = \frac{1}{4} *(\cosh 2x)(2) - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \{ (\cosh 2x) - 1 \}$

$= \frac{\{ (\cosh 2x) - 1 \}}{2}$

.....

قاعدة السلسلة

((The chain base))

قـاعـدة الـسـلـسـلـة : هي احد تطبيقات المشتقة وتعني تسلسل المجاهيل في الدوال المعطات للوصول الى قيمتها العددية من خلال الاشتقاق المتسلسل . والقانون ادناه يوضح القاعدة :

$$((\quad \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} \quad = \quad \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}} \quad * \quad \frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{dx}} \quad))$$

****

مـــثـــال 1

اذا كان تعريف الدالتين($y = t^2 + 2$),($t = x^2 + 1$).فجد $(\frac{dy}{dx})$:

الـحـــل :

$\frac{dy}{dt} = 2t$,,, $\frac{dt}{dx} = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2t * 2x$$

$\frac{dy}{dx} = 4\,(t\,x)$ ..... $4(x^2 + 1)\,x$

$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4x$

مـثـــال 2

جـــد (dy/dx) من المعادلات التالية :

$$y = t^3 - 3t^2 + 5t - 4 \quad , \quad t = x^2 + x$$

الـحـــل :

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = 3t^2 - 6t + 5 \ , \qquad \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} = 2x + 1$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = (3t^2 - 6t + 5) * (2\mathrm{x} + 1)$$

$= [3(x^2 + x)^2 - 6(x^2 + x) + 5] * [2x + 1]$

****

مـثال 3

جـد الاشتقاق عن طريق قاعدة السلسلة علما ان الدالة (y) والمتغير (x) للدالة المشتقة .

$(y = 1 - t^2)$ <<<<>>>> (x = t / t+1)

الـحـل :

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx}$$

dy/dt = - 2t

$x = \frac{t}{t+1}$ ..... x(t+1) = t .... (xt + x)= t .... X = (t – xt)

x = t (x-1) >>>>> $((t = \frac{x}{1-x}))$

$\therefore$ dt/dx = $\frac{[(1-x)*(1)] - [(x)*(-1)]}{(1-x)^2}$

$\frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

dy/dx = -2 (t) * $\frac{1}{(1-x)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -2 * \frac{x}{(1-x)} * \frac{1}{(1-x)^2}$$

****

مـــثـــال 4

جـــد dy/dx . حيث : $x = 2t+3 , y = t^2 - 1$.

الـحـل :

$x = 2t+3$ >>>>> $x - 3 = 2t$ >>>>> $\therefore \quad t = \frac{x-3}{2}$

$dy/dt = 2t$ ..... $dt/dx = 1/2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{2} \quad \ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-3}{2}$$

معادلة المماس و العمودي على المنحني

The tangent and vertical equation of the curve

1/ ميل المماس و العمودي على المنحني :

ميل المستقم المماس وهو احد تطبيقات المشتقة حيث يتم استخراج الميل للمماس (m1) من خلال المشتقة الاولى للدالة عند نقطة معينه .

ميل المستقيم العمودي على المماس وهو المقلوب السالب لميل المماس (m2) .

$$[\ m1 * m2 = -1\ ] \quad \ldots\ldots\ldots \quad m2 = -1 / m1$$

****

مـــثـــال : جـــد ميل المماس و ميل العمودي عليه للدالة

($y = x^2 + 5x + 7$) , عند النقطة (2 , 7) .

الـحـــــل :

$y' = 2x + 5$

(ميل المماس) $m1 = y' = 2\ (7) + 5$ >>>>>> 19

(ميل العمود على المماس) $m2 = -1 / 19$

****

2/ مـعادلـة المستقيم المماس و المستقيم العمودي بدلالة نقطة وميل

$(y - y1) = m (x - x1) >>> \ m = (y - y1) / (x - x1)$

حـيث m = الميل , (x1 , y1) النقطة المـعلومة

****

مـثال 1

جـد معادلة المستقيم المماس و معادلة المستقيم العمودي علية للـدالة ($y = 4 x^2 - 3$) عند النقطة (1 , 1) .

الـحـل :

$y' = 8x \ >>> \ 8 * (1) = (\underline{8 = m1}) , (\underline{m2 = - 1/8})$

معادلة المماس : $y - 1 = 8 (x - 1)$

معادلة العمود : $y - 1 = -1/8 (x - 1)$

****

مـثـال 2

جـد معادلة المماس و العمود على منحني العادلة :

$((y = x^3 + 2x^2 + 5x + 20))$, عنـد النقطة (1 , 6).

الـحـل

$m 1 = y' = 3x^2 + 4x + 5 >>>> = 3 * 1 + 4 * 1 + 5$

((m1 = 12)) ,,,,,, ((m2 = -1/12))

((y – 6 = 12 (x – 1))) : معادلة المماس

((y – 6 = -1/12 (x – 1))) : معادلة العمود

****

مـلاحـظـة ::

*اذا كان المماس يمس المحور (x) فان y = 0 , (x , 0)

*اذا كان المماس يمس المحور (y) فان x = 0 , (0 , y)

****

مـــثـــال :

جـــد معادلتا العمود و المماس على المنحني للدالة والذي يمس المحور (x) . (y = $x^2 - 3x - 4$) :

الـــحـــل :

بمـــا ان يمس المحور x . ((y = 0))

$y = x^2 - 3x - 3$

$0 = x^2 - 3x - 3$

$(x - 4) (x + 1) = 0$

(x – 4) = 0 >>>>>> (x = 4) امـــا

(x + 1) = 0 >>>>>> (x = -1) او

∴ (4 , 0) , (0 , -1) . يطبق الحل في الحالتان :

النـقـطـة (0 , 1-)

$y' = 2x - 3$ >>>> = 2 (-1) – 3 >>>> -2 -3

m1 = -5 <<<<<>>>>> m2 = 1/5

معادلة المماس ..... y – 0 = -5 (x + 1)

معادلة العمود ..... $y - 0 = 1/5 (x + 1)$

المشتقات من الرتب العليا

ان الدالة المعرفة على اساس متغير معين تشتق من الرتبة الاولى والثانية و الثالثة و.....الخ من الرتب العليا بما يناسب متطلبات السؤال او احتاج الدالة لاستخراج النتائج المطلوبة .

اذا كانت الدالة (y) معرفة على اساس المتغير (x) فان

$(y)^{/}$ هي المشتقة الاولى للدالة وعلى اساس هذه القاعدة فان

$(y)^{//}$ مشتقة ثانية للدالة , $(y)^{///}$ مشتقة ثالثة للدالة وهكذا .

****

((1)) : - جـــد المشتقة الربعة اذا كانت الدالة:

$$y = x^4 - 3x^2 - 9$$

$$y^{/} = 4x^3 - 6x$$

$$y^{\backslash\backslash} = 12\,x^2 - 6$$

$$y^{\backslash\backslash\backslash} = 24\,x$$

$$y^{\backslash\backslash\backslash\backslash} = 24$$

((2)):- اذا كانت $y = \sin 2x$ جـد المشتقة الثالثة للدالة .

$$y^{\backslash} = \cos 2x\ (2)$$

$$y^{\backslash\backslash} = -2\ \sin 2x\ (2)$$

$$y''' = -4\cos 2x \quad (2)$$

الـسرعـة و التـعـجـيـل

Speed and accelertion

الــسرعـة: هي معدل تغير المسافة عند زمن معين .

وتعبر المشتقة من الدرجة الاولى عن السرعة و ذلك من خلال تغير مسافة الجسم المتحرك بزمن معين . وان الانتجاه مهم في السرعه للجسم المتحرك.

الــتعـجـيـل: هو تغير السرعة في وحدة الزمن وهنا ليس للاتجاه اهمية بالنسبة للجسم المتحرك .

تعد السرعة والتجيل من التطبيقات للمشتقه ذات الرتب العليا للدالة ومن خلال التعاريف للسرعة والتعجيل نلاحظ ارتباط بين السرعة والتعجيل فكلاهما يعتمدان على حركة الجسم خلال فترة زمنية معينة . فلسرعة هي المشتقه الاولى للدالة و التعجيل هي المشتقة الثانية مع اعتماد الزمن كمتغير للاثنان .

****

مــثال 1

اذا كانت المسافة بالاقدام التي يقطعها جسم متحرك حسبت من المعالدلة (($s = t^4 - t^3$)) حيث (t) بالثواني . فما مقدار سرعة الجسم و مقدار تعجيله بعد (1) ثانية؟

الــحـل : $s = t^4 - t^3$

السرعة بعد ثانية واحدة $s' = 4t^3 - 3t^2$ .... $4(1) - 3(1) = 1$

التعجيل بعد ثانية واحدة $s'' = 12t^2 - 6t$ ..... $12(1)^2 - 6(1)$

مـثـال 2:

في تجربة عملية لابحاث فيزيائية قذف الباحث جسم الى الاعلى بسرعة(49) فكان ارتفاع الجسم معطى بالمعادلة :

($s = 49t - 4.9t^2$) , حيث t الزمن بالثواني .

جــد السرعة عندما يكون الارتفاع (44.1).

الـــحـــل :

الزمن غير موجود ؟

نعوض عن الارتفاع الجديد بامعادلة لاستخاج الزمن

$S = 49t - 4.9t^2$

$44.1 = 49t - 4.9t^2$ ..... $4.9t^2 - 49t + 44.1 = 0$

($t^2 - 10t + 9 = 0$) ..... $(t - 1)(t - 9) = 0$

($t = 1$) ; ($t = 9$) نعوض بالزمن في الحالتين :

عندما $t = 1$ (نعوض بالزمن لاستخراج السرعة)

$s' = 49 - (2)(4.9t)$ ..... $= 49 - 9.8t$

$= 49 - 9.8\ (1)$ ..... $= 39.2$

الاشتـقـاق الــجزئــي

The partial derivative

الدالة بعدة متغيرات طريقة اشتقاقها مختلفة عن الدالة بمتغير واحد

لـتـكن الـدالــة $z = f(x, y)$ معرفه على اساس متغيران

اذا كان (x) يتغير مع تثبيت (y) فان (z) دالة في (x) وبالتالي فان الدالة تشتق على اساس المتغير (x) . وتسمى مشتقة جزئية للدالة (f) بالنسبة الى متغيرها (x) و يرمز لها $f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$

و الــعكس صـحـيـح .

مــثــال 1

لتكن الدالة $z = f(x,y) = x^2 * \sin y$. جــد المشتقة الجزئية للمتغير (x) , ثم للمتغير (y) :

الــحــل:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x * siny$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 * \cos y$$

****

مـثــال 2:

دالــة لمتغيرين تعطى على الشكل التالي : $f(x,y)= x^2(\sin y x)$

جـــد :$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$

الــحــل :

$$f_x(x,y) = x^2 (\cos y x) (y) + (\sin y x) (2x)$$

$$= x [(x y) (\cos y x) + 2(\sin y x)]$$

$$f_y (x,y) = x^2 (\cos y x) (x) + (0) (\sin y x)$$

$$= x^3 (\cos y x)$$

****

مـثــال 3 :

جـــد : $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $Z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$

الــحــل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 8y$$

****

الــمـثال 4 :

الــدالــة : $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = z$. جـــد الــمـشـتـقة الــجزئــية :

الــحــل :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y(x,y) = \frac{-x^2}{y^2} + \frac{2y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{zx} = z_x(x,y) = \frac{1}{y}\,2x - \frac{y^2}{x^2}$$

$$= \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2}$$

****

مـثــال 5 :

اذا كانت مساحة مثلث تساوي (k = 1/2 * a * b *(sin c

حـــيـث a = 20 , b = 30 , c = 30 . جـــد :

1/ احسب معدل تغير k بالنسبة الى a عندما b,c ثابتين.

2/ احسب معدل تغير k بالنسبة الى c عندما b,a ثابتين.

3/ احسب معدل تغير b بالنسبة الى a عندما k,c ثابتين.

الـــحـــل :

1/ $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2} * b * sinc \quad \gg\gg \quad = \frac{1}{2}(30)(sin30)$

الفرع الثاني و الثالث واجب .

****

مـثـــال6:

(($X^2 + y^2 + z^2 = 25$)) وهي معادلة كرة نصف قطرها (z)

ومركزهـــا , (0,0,0) . جـــد :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \; , \; \frac{\partial z}{\partial y} \; , \; \frac{\partial y}{\partial x} \; , \; \frac{\partial x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2z\ \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2z\ \frac{dz}{dy}$$

*** واجـــب *****

المـــصـــفـــوفـــــات **((Matrix))**

تعريف المصفوفة : هي مجموعة من العناصر المرتبة في m من الصفوف و n من الاعمدة . و هي نوعان اما مصفوفة رمزية وتكون جميع عناصرها رموز او مصفوفة عددية وتكون جميع عناصرها اعداد حقيقية .

يرمز للمصفوفة بالحروف الكبيرة ..... A , B , C , D

و يرمز لعناصر المصفوفة بالحروف الصغيرة ...a , b , c , d

درجة المصفوفة : (m x n) وهـــي عـــدد الصفوف والاعمدة في كل مصفوفة .

مواقع العناصر في كل مصفوفة :

i : موقع العنصر في الصف

J : موقع العنصر في العمود

A (m x n) = a i j

هناك انواع كثيرة من المصفوفـــات

المصفوفة المربعة : هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الاعمدة .

المصفوفة الصفرية : وهي جميع عناصرها العدد صفر مهما كان عدد صفوفها و اعمدتها .

عناصر القطر الرئيسي : هي العناصر التي يكون فيها رقم الصف يساوي رقم العمود
a11 , a22 , a33 , a44 ,.....

هنالك طرقة لتحويل المصفوفة الرمزية الى مصفوفةعددية(رقمية)

مثال: اكتب المصفوفة (MXN)=(2X3) A =aij

حـــيـــث ان ((a ij = i j - 2))

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \end{bmatrix}$$

aij = i j – 2

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a11: 1*1 – 2 = -1

(هي مصفوفة عددية) a12 : 1*2 – 2 = 0

a13 : 1*3 – 2 = 1

a21 : 2*1 – 2 = 0

a22 : 2*2 – 2 = 2

a 23 : 2*3 – 2 = 4

العمليات الجبرية على المصفوفات

1 / الجمع و الطرح : ان حاصل جمع او طرح المصفوفات المتماثلة (لها نفس عدد الصوف و الاعمدة) ينتج مصفوفة جديدة لها نفس عدد الصفوف والاعمدة .

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b11 & b12 \\ b21 & b22 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a11 + (-)b11 & a12 + (-)b12 \\ a21 + (-)b12 & a22 + (-)b22 \end{bmatrix}$$

2/ الضرب او القسمة على ثابت : وهي ضرب او قسمة كل

عنصر من عناصر المصفوفة في ذالك الثابت .

K * A = K (aij) mxn = (k aij)mxn

1/k * A = 1/k (aij)mxn = (1/k aij)mxn

3/ضرب المصفوفات : ان حاصل ضرب أي مصفوفتين ينتج عنه مصفوفة جديدة عناصرها ناتجة من مجموع حاصل ضرب عناصر صف المصفوفة الاولى في عناصر عمود المصفوفة الثانية بشرط ان تكون عدد صفوف الاولى مساوية الى عدد اعمدة المصفوفة الثانية .

B = (bkj) nxr ; A = (aik) mxn

$$A*B= (aik)mxn\ (bij)nxr= \left(\sum_{k=1}^{n} aik\ bkj\right)mxr$$

(A3X2)*(B2X3)=

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b23 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a11*b11+a12*b21) & (a11*b12+a12*b22) & (a11*b13+a12*b23) \\ (a21*b11+a22*b21) & (a21*b12+a22*b22) & (a21*b12+a22*b23) \\ (a31*b11+a32*b21) & (a31*b12+a32*b22) & (a31*b13+a32*b23) \end{bmatrix}$$

1/ B = $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

جـــــــد: A + B ; B - A

$$A+B=\begin{pmatrix} (1+0) & (2+(-2)) & (3+5) \\ (0+1) & (-2+4) & (4+3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix} (0-1) & (-2-2) & (5-3) \\ (1-0) & (4-(-2)) & (3-4) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

2/ F = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$; K=2 ; جـــــد : K * F

$$KF=\begin{pmatrix} (4*2) & (8*2) \\ (12*2) & (0*2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

3/ K = 1/5 ; N = $\begin{pmatrix} 5 & 25 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$ جـــد : 1/K *N

$$1/K*N=\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}*5\right) & \left(\frac{1}{5}*25\right) \\ \left(\frac{1}{5}*30\right) & \left(\frac{1}{5}*0\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

4/ A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ جـــد (A*B)

$$AB=\begin{pmatrix}(2*4+3*1) & (2*5+3*2)\\ (4*4+1*1) & (4*5+1*2)\\ (5*4+2*1) & (5*5+2*2)\end{pmatrix}$$

المـتـجـهـات ((Vector))

تعريف المتـجة : **المتجة هو كمية لها مقدار و اتجاه مثل الازاحة والسرعة والتعجيل .**

يمثل المتجة بيانيا فلا بد من التعبير عنه بمقدار و اتجاة :

اما المقدار فيعبر عنه بقيمه عددية " و اما الاتجاه فيعبر عنه بسهم .

حيث ان : A = $\vec{A} = \overrightarrow{FP}$

ان نقطة F تمثل بداية المتجة او نقطة الاصل و P تمثل نهاية المتجة و ان A تمثل المتجة الذي لة طول ومقدار واتجاة .

وحدات المتجة :

// يرمز لوحدة المتجة بالاتجاة المحور X بالرمز i .
// يرمز لوحدة المتجة بالاتجاة المحور Y بالرمز j .
// يرمز لوحدة المتجة بالاتجاة المحور Z بالرمز k .

حيث ان وحدة المتجة يعبر عنها عدديا او رقميا (x , y , z) .

طول وحدة المتجة = 1 ***/////// $\vec{A}$ = ai + bj + ck ////***

((العـمـيات الـجبـريـة عـلى الـمـتجـهات))

1/- الـجمع و الـطرح : اذا كان لدينا المتجهان $\vec{A}$ = a1i + b1j + c1k

$\vec{B}$ = a2i + B2j + c2k

==========

فـــان : $\overrightarrow{A+B}$ = (a1+a2) i + (b1 +b2) j + (c1+c2) k

$\overrightarrow{A-B}$ = (a1 – a2) i + (b1 – b2) j + (c1 – c2) k

==========

2/- ضرب المتجة بعدد ثابت : اذا كان المتجة >>> $\overrightarrow{A}$ = ai + bj + ck <<< حيث ان m عدد ثابت .

==========

$\overrightarrow{mA}$ = m (ai + bj + ck) فان >> $\overrightarrow{mA}$ = mai + mbj + mck

==========

طـول المتجة : ان كــل متجة له طول ويرمز له /A/ حيث ان قانون ايجاد المتجة : $/A/ = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

==========

مثـــال // اذا كــان لدينــا المتجــهان $\vec{A} = 3i + 2j + 3k$;;;; $\vec{B} = 6i + 2j + 3k$

جـــــــد :::

1/- / A / >> 2/- / B / >> 3/- $\overrightarrow{A+B}$ >> 4/- $\overrightarrow{A-B}$ >> 5/- $\overrightarrow{3A}$ >> 6/- $\overrightarrow{3A-2B}$

الحـــل // 1/- / A / = $\sqrt{a1^2 + b1^2 + c1^2}$ = $\sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2}$ >>> / A / = $\sqrt{22}$

2/- / B / = $\sqrt{a2^2 + b2^2 + c2^2}$ = $\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}$ >>>> / B / = $\sqrt{49}$ = 7

3/- $\overrightarrow{A+B}$ = (3+6)i + (2+2)j + (3+3)k = 9i + 4j + 6 k

4/- $\overrightarrow{A-B}$ = (3 – 6)i + (2 – 2)j + (3 – 3)k = - 3 I + 0 j + 0 k

5/- $\overrightarrow{3A}$ = 3 (3i + 2j + 3k) = 9i + 6j + 9k

6/- $\overrightarrow{3A-2B}$ >>> $\overrightarrow{2B}$ = 2 (6i + 2j +3k) = 12i + 4j + 6k

$\overrightarrow{3A-2B}$ = (9 – 12)i + (6 – 4)j + (9 – 6)k = - 3i + 2j + 3k

3/- ضرب المتجهات : وهو حاصل ضرب متجهان . و يكون الضرب الاتجاهي نوعان :

النوع الاول // الضرب العددي القياسي Dot product

هو حاصل ضرب مقداري للمتجهين في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما .

اذا كان المتجة الاول $\vec{A}$ و المتجة الثاني $\vec{B}$ فان حاصل الضرب لهما (A dot B) = (A . B) .

==========

((قانون الضرب العددي)) <<<< { a1*a2 + b1*b2 + c1*c2 } = A . B

((قانون جيب تمام الزاوية)) <<<< { \ A \ * \ B \ * cos θ } A . B =

==========

// اذا كان المتجهان عموديان احدهما على الاخر . فان حاصل ضربهما العددي يساوي صفر .

// اذا كان المتجهان متوازيان فان حاصل الضرب العددي يساوي واحد .

مـــثال // جـــد قيمة اذا علمت ان المتجة $\vec{A}$ عمودي على المتجة $\vec{B}$

$\vec{A}$ = 2i +b1j +k ;;;;;; $\vec{B}$ = - 4i + 2j + 2k

الـــحل // A . B = 0 >>>>>> 0 = a1 a2 + b1 b2 + c1 c2

0 = (2 * - 4) + (b1 * 2) + (1 * 2)

0 = - 8 + 2 b1 + 2 >>> 6 = 2 b1 >>> b1 = 6 / 2 >>>> b1 = 3

مـــثـــال // جـــد الزاوية المصنوعة بين المتجهين : $\vec{A}$ = 2i +2j – k ;;;; $\vec{B}$ = 6i – 3j +2k

الـــحـل // A . B = a1* a2 + b1*b2 + c1*c2 = 2 * 6 + 2*- 3 + 2* -1 >>>>> A . B = 4

$\backslash A \backslash = \sqrt{2^2 + 2^2 + -1^2} = \sqrt{9} = 3$

$\backslash B \backslash = \sqrt{6^2 + -3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$

A . B = \ A\ . \ B \ * COS θ >>>> 4 = 3 * 7 COS θ

4 = 21 * COS θ >>>> COS θ = 4 / 21 >>>> $\theta = \cos^{-1}\frac{4}{21}$ = 79

النوع الثاني // الضرب الاتجاهي Cross product

يرمز له (A X B) ان حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين المضروبين يعطي متجة ثالث ويعرف بانه ((حاصل الضرب الاتجاهي لطول المتجهين (AXB) و جيب الزاوية المحصورة بينهما .

==========

قانون جيب الزاوية A X B = \ A \ . \ B \ * sin θ

قانون الضرب الاتجاهي $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \end{vmatrix}$

==========

مـــثال // اذا كان لدينا المتجهان $\vec{A} = 3i + 2j + k$ <<<<<>>>>> $\vec{B} = 2i + 2j + 3k$

الاسهم $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix}$ = { 6i + 2j + 6k } – { 9j + 2i + 4k } >>> = 4i – 7j – 2k

التعويض $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ >>> $i * \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - j * \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} * k \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ = 4 i – 7 j + 2k

خواص الضرب الاتجاهي :

// المتجة $\vec{c}$ الناتج من حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\overrightarrow{AXB}$ يكون متجها عموديا على المستوي الذي يكون $\vec{A}$, , $\vec{B}$ ضلعان فية ((متواي الاضلاع)) . <<<< $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ >>>>> حاصل الضرب الاتجاهي يساوي المتجة العمود .

// طول المتجة الناتج من الضرب الاتجاهي / C / والذي يسمى (المتجة العمودي) يكون مساوي الى مساحة متوازي الاضلاع الذي $\vec{B}$ و $\vec{A}$ ضلعان فيه . مساحة متوازي الاضلاع = طول المتجة العمود / C/ .

// مساحة المثلث = نصف مساحة متوازي الاضلاع

// اذا كان المتجة غير موجود فيمكن استخراجة عن طريق النقاط بستخدام القانون :

قانون ايجاد المتجة $\overrightarrow{AB}$ = (a2 – a1) i + (b2 – b1) j + (c2 – c1) k

مـــثال // جـــد المتجة الواصل بين النقطتين $\overrightarrow{PQ}$, P (3,2,1) ; Q (4,6,3) ثم جـد طول المتجة /PQ/ .

الحـــل // $\overrightarrow{PQ}$ = (a2 – a1) i + (b2 – b1) j + (c2 – c1) k

= (4 - 3) i + (6 - 2)j + (3 - 1)k

= i + 4j +2k

/ P Q / = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ = $\sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2}$ = $\underline{\sqrt{21}}$

مثـــال // جـــد المتجة العمود ((متجة الوحدة)) على المتجهين $\vec{A}$ = i – 4j + k ;; $\vec{B}$ = 2i + 3j

الحـــل // حاصل الضرب الاتجاهي = المتجة العمود <<< $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ = - 3i + 2j + 11k = $\vec{c}$

مـــثـــال // جـــد طول المتجة العمود للمثال اعلاه $|A \times B| = |C|$

= $\sqrt{-3^2 + 2^2 + 11^2}$ >>>>>> = / C / = $\sqrt{134}$

مـــثال // جـــد مساحة المثلث المصنوع من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اعلاة .

مساحة المثلث = 1/ 2 مساحة متوازي الاضلاع

مساحة متوازي الاضلاع = / C / = $\sqrt{138}$

مساحة المثلث = 1 / 2 * $\sqrt{134}$

مـثال // اذا كان لدينا المتجة $\vec{A} = 2i - 6j - 3k$,,,,, $\vec{B} = 4i + 3j - k$

1/ جد الضرب الاتجاهي A X B .

2/ المتجه العمودي على المستوي الذي يحتوي المتجهين (A , B) .

3/ مساحة المتوازي الاضلاع .

4 / مساحة المثلث .

الـحــل //

$$1/\ A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{matrix} = 15\,i - 10\,j - 30\,k$$

2/ المتجة العمودي على المستوي = A X B

$$3/\ |C| = |A \times B| = \sqrt{15^2 + -10^2 + 30^2} = \sqrt{1225}$$

4/ مساحة المثلث = 1 / 2 مساحة متوازي الاضلاع

$$\sqrt{1225}\ 1/2 =$$

مـثال // جـد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط Q(2,-1,1) ;P(1,3,2) ;R(-1,2,3)

الـحــل //

$\overrightarrow{PQ}$ = (a2 – a1) i + (b2 – b1) j + (c2 – c1) k

= (2 – 1) i + (-1 – 3) j + (1 - 2) k

$\overrightarrow{PQ}$ = i – 4 j – k

$\overrightarrow{PR}$ = (- 1 – 1) i + (2 – 3) j + (3 – 2) k

ملاحظة : ان الضلعان $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ هما ضلعان في متوازي الاضلاع :

$$\text{مساحة المثلث} = 1/2 * \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| \quad <<< \quad \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{matrix}$$

المتجه العمود $= \vec{C} =$ -5 i + j – 9 k

$$/C/ = \sqrt{-5^2 + 1^2 + -9^2}$$

$/C/ = \sqrt{107}$

مساحةالمثلث = $1/2 * \sqrt{107}$

الـغـايـات ((Limits))

تعـريـف : لنـفرض ان الدالـة ((f)) معرفة لقـيـم ((x)) القريبة من a . نقول ان ((L)) هي غاية الدالة {((x)): f } عندما ((x))تقترب من a . وتكتب على الشكل التالي :

$L_{x \to a} = limt . f(x)$

هنالك انواع من الدوال . لذلك كل نوع له دالة خاصة به :

انـــــواع الــدوال

1/ غايـــة الدالـــة الجـبريـــة :

اذا كانت كل من m ; b اعداد حقيقية :

فـــان f (x) = m x + b

$$\text{Lim}_{x\to a}\ f(x) = \lim_{x\to a}(mx+b) = ma+b$$

اذا كانت هنالك دالتان احدهما (x) f و الاخرا (x) g فان :

$$\lim_{x\to a} g(x) = L \quad ::::::: \quad \lim_{x\to a} f(x) = K$$

$$a/-\ \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \ \ldots\ [L+K]$$

$$b/-\ \lim_{x\to a}(f(x)*g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x) \ \ldots\ [L*K]$$

$$C/-\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x-a} f(x)}{\lim_{x-a} g(x)} \ \ldots\ [K/L]$$

$$d/-\ \lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x-a} f(x)}\ ;\ [\sqrt[n]{K}\ ] \text{ عندما n عدد زوجي; } K \geq 0$$

$$e/-\ \lim_{x\to a} C\,f(x) = C * \lim_{x\to a} f(x) = [C*K]$$

امـــــثـــلـــة :

$$1/-\ \lim_{x-0}\frac{x}{x-1} = \frac{0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$2/-\ \lim_{x-2} -x+2x = -0+2(0) = 0$$

$$3/-\ \lim_{x-2} x^2 + 2x + 1 = (2)^2 + 2(2) + 1 = 4+4+1 = 9$$

$$4/-\ \lim_{x-1}\frac{x^2+2x+1}{x+1} = \frac{1^2+2(1)+1}{1+1} = \frac{1+2+1}{2} = \frac{4}{2}$$

$$5/-\ \lim_{x-3}\frac{x^2+9}{x-3} = \lim_{x-3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x-3}(x+3) = (3+3) = 6$$

$$6/-\ \lim_{x-0}\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{3}}{x} = \lim_{x-0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} * \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \lim_{x-0}\frac{\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})-\sqrt{3}(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x-0}\frac{(x+3)+(\sqrt{3}*\sqrt{x+3})-(\sqrt{3}*\sqrt{x+3})-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x-0}\frac{x+3-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \lim_{x-0}\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{0+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

7/- $\lim_{x-1} \frac{(x^2-1)}{\sqrt{x}-1}$ ..... $x \geq 0$ { 1 }

$$\lim_{x-1} \frac{(x^2-1)}{\sqrt{x}-1} * \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x-1} \frac{[(x-1)(x+1)] * (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x-1} \frac{(x-1) * (x+1) * (\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x} * (\sqrt{x}+1) - 1 * (\sqrt{x}+1)} = \lim_{x-1} \frac{(x-1) * (x+1) * (\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x-1} \frac{(x-1) * (x+1) * (\sqrt{x}+1)}{(x-1)} = \lim_{x-1} (x+1) * (\sqrt{x}+1) = (1+1) * (\sqrt{1}+1)$$

$$= 2\sqrt{1+2}$$

2/ غايــة الـدالــة المـثـلـثـيـة :

<u>((قـوانـــيـن غـايـات الـدوال الـمـثـلـثـة))</u>

$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$;;; $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin a\theta}{a\theta} = 1$;;; $\lim_{\theta \to 0} \sin a\theta = 0$

$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan a\theta}{a\theta} = 1$;;; $\lim_{\theta \to 0} \cos a\theta = 1$;;; $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos \theta}{\theta} = 0$

<u>امـثـلـة :</u>

1/- $\lim_{\theta \to 0} \frac{2 \sin 2\theta}{2\theta} = 2 \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} = (2) * (1) = 2$

2/- $\lim_{\beta\to 0}\frac{\sin 2\beta}{\beta}=\lim_{\beta\to 0}\frac{2\beta}{\beta}*\frac{2}{2}=2\lim_{\beta\to 0}\frac{\sin 2\beta}{2\beta}=2*1=2$

3/- $\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin^2\delta}{\delta^2}=\lim_{\beta\to 0}(\frac{\sin\delta}{\delta}*\frac{\sin\delta}{\delta})=1*1=1$

4/- $\lim_{C\to 0}\frac{\sec 2C\ \tan 3C}{5C}=\lim_{C\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos 2C}*\frac{\sin 3C}{\cos 3C}\right)}{5C}=\lim_{C\to 0}\left\{\frac{1}{5C}*\frac{1}{\cos 2C}*\frac{1}{\cos 3C}*\sin 3C\right\}$

$\frac{1}{5}\lim_{C\to 0}\left\{\frac{1}{C}*\frac{1}{\cos 2C}*\frac{1}{\cos 3C}*\sin 3C\right\}*\frac{3}{3}=\frac{3}{5}\lim_{C\to 0}\left\{\frac{\sin 3C}{3C}*\frac{1}{\cos 2C}*\frac{1}{\cos 3C}\right\}=\frac{3}{5}(1*1*1)$

5/- $\lim_{\gamma\to 0}\frac{\cot 4\gamma}{\cot 3\gamma}=\lim_{\gamma\to 0}\frac{\frac{1}{\tan 4\gamma}}{\frac{1}{\tan 3\gamma}}=\lim_{\gamma\to 0}\frac{\tan 3\gamma*\frac{3\gamma}{3\gamma}}{\tan 4\gamma*\frac{4\gamma}{4\gamma}}=\lim_{\gamma\to 0}\frac{\frac{\tan 3\gamma}{3\gamma}*3\gamma}{\frac{\tan 4\gamma}{4\gamma}*4\gamma}$

$\frac{3\gamma}{4\gamma}*\lim_{\gamma\to 0}\frac{\frac{\tan 3\gamma}{3\gamma}}{\frac{\tan 4\gamma}{4\gamma}}=\frac{3}{4}*1$

التكامل

The integration

تعريف التكامل : هو عملية رياضية عكس عملية المشتقة يراد بها ايجاد دالة علمت مشتقتها وتسمى عملية التكامل ورمزها (∫).

وهنالك نوعان للتكامل ((تكامل محدد و تكامل غير محدد))

النوع الأول * التكامل غير المحدد *

هذا النوع من التكامل لا حدود له حيث تبقى نتيجة تكامل الدالة بدلات المتغير و تضاف الى النتيجة النهائية ثابت التكامل

وان تكامل أي دالة يعطى بالصيغة التالية :

If $f'(x) = f(x)$ then $\int f\ (x)dx$

$= F(x) + c$

حيث (c): ثابت التكامل. (يضاف في حالةالتكامل غيرالمحدد فقط)

ناتج تكامل الدالة f(x) : F(x)

****

قــاعــدة التكامل

$1/\int dx = x + c$

$2/\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad ,,, \quad n \neq 1$

$3/\int a\ f\ (x)dx\ = a\ \int f\ (x)dx$

$4/\int[\ f(x) \mp\ g(x)]dx = \int f(x)dx\ \mp\ \int g(x)dx$

$5/\int \langle f(x)\rangle^m * f'(x)\ dx = \frac{\langle f(x)\rangle^{m+1}}{m+1} + c\ ,,, m \neq -1$

****

تكامل الدوال الجــبــريــة :

$1/\ y = \int x^5\ dx = \frac{x^6}{6} +\ c$

2/ $y = \int (5x^6 + 3x^2 - 2x + 1)\ dx$

$= \int 5x^6 dx + \int 3x^2\, dx - \int 2x\, dx + \int dx$

$= 5\int x^6 dx + 3\int x^2\, dx - 2\int x\, dx + \int dx$

$= 5\frac{x^7}{7} + 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + c$

$= \frac{5}{7} * x^7 + x^3 - x^2 + x + c$

3/ $y = \int (x^2 + \sqrt{x})dx = \int x^2\, dx + \int x^{\frac{1}{2}}\, dx$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \left[\frac{1}{3} * x^3\right] + \left[\frac{2}{3} * x^{\frac{3}{2}}\right] + c$

4/ $y = \int \frac{dx}{(3x+2)^2} = \int (3x+2)^{-2}\ dx * \frac{3}{3}$

$= \frac{1}{3} * \int (3x+2)^{-2} * 3dx$

$= \frac{1}{3} * \frac{(3x+2)^{-1}}{-1} + c \quad = \quad \frac{-1}{3(3x+2)}$

5/ $y = \int \frac{3r*dr}{\sqrt{1-r^2}} \quad = \quad 3\int \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} * r\, dr$

$= 3\int \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} * r * \frac{-2}{2}\, dr \qquad = \qquad =$

$\frac{-3}{2}\int (1-r^2)^{\frac{-1}{2}} * (-2r)dr$

$= \frac{-3}{2} * \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$

$= \frac{-3}{2} * \frac{2}{1}\sqrt{1-r^2} \quad >>>> = -3\sqrt{1-r^2} + c$

6/ $y = \int \frac{x}{(3x^2+40)^6}\, dx = \int (3x^2+40)^{-6}\ x\, dx * \frac{6}{6}$

$= \frac{1}{6} \int (3x^2+40)^{-6}\ 6x\, dx$

$= \frac{1}{6} * \frac{(3x^2+40)^{-5}}{-5} + c = \frac{-1}{30(3x^2+40)^5} + c$

7/ $y = \int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\, dx = (1+2x+x^2) * x^{\frac{-1}{2}}\, dx$

$= \int x^{\frac{-1}{2}} dx + \int 2x^{\frac{1}{2}}\, dx + \int x^{\frac{3}{2}}\, dx$

$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c$

$= 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$

$= 2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$

8/ $y = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \frac{1}{x^2}\, dx - \int \frac{1}{x^3}\, dx$

$= \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx = \frac{(x^{-1})}{(-1)} - \frac{(x^{-2})}{(-2)} + c$

$= -x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2} + c = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$

****

تكامل الدوال الاسية :

1/ $\int e^{f(x)} * fx/\, dx = e^{f(x)} + c$

2/ $\int e^{x}\, dx = e^{x} + c$

3/ $\int e^{tx}\, dx = \frac{1}{t} * e^{tx} + c$

****

جـــد تـكـامـــل الـدوال الاسـيـة :

$$1/\ y = \int e^{16x}\ dx = \frac{16}{16}\int e^{16x}\ dx$$

$$= \frac{1}{16} * \ e^{16x} + c$$

$$2/\ y = \int e^{(3x^2+6x)}\ (x+1)dx$$

$$= \frac{6}{6}\int e^{(3x^2+6x)}\ (x+1)dx$$

$$= \frac{1}{6}\int e^{(3x^2+6x)}\ (6x+6)dx = \frac{1}{6}\ e^{(3x^2+6x)} + c$$

تـكـامـــل الـدوال الـلـــوغـارتـمـيـة :

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx\ =\ \ln|f(x)|\ + c$$

****

$$1/\ y = \int \frac{dx}{x}\ =\ \ln x + \ c$$

$$2/\ y = \frac{dx}{(x+2)} = \int \frac{1}{(x+2)}\ dx$$

$$= \ln|x+2| + \ c$$

$$3/\ y = \int \frac{2x+3}{x^2+3x-600}\ dx\ = \int \frac{1}{x^2+3x-600}(2x+3\ )\ dx$$

$$= \ln|x^2+3x-600| + \ c$$

****

تــكـامــل الــدوال الــمـثـلـثـيـة

$1/\int \sin u \ du = -\cos u + c$

$2/\int \cos u \ du = \sin u + c$

$3/\int \tan u \ du = -\ln|\cos u| + c$

$4/\int \cot u \ du = \ln|\sin u| + c$

$5/\int \sec^2 u \ du = tan\, u + c$

$6/\int \csc^2 u \ du = -\cot u + c$

$7/\int (\sec u * \tan u) \ du = \sec u + c$

$8/\int (\csc u * \cot u) \ du = -\csc u + c$

$9/\int \csc u \ du = \ln|\csc u - \cot u| + c$

$10/\int \sec u \ du = \ln|\sec u - \tan u| + c$

****

جــد التـكـامــل للــدوال الــمـثــلـثــيـة :

1/ $y = \int \sin 3x \ dx = \frac{3}{3} \int \sin 3x \ dx$

$= \frac{1}{3} \int \sin 3x * 3 \ dx = \frac{1}{3} (-\cos 3x) + c$

2/ $y = \int x * \tan x^2 \ dx$

$= \frac{1}{2} \int 2x * \tan x^2 \ dx$

$= \frac{-1}{2} \ln|\cos x^2| + c$

3/ $y = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \ dx = \int (\frac{\sin x}{\cos x} * \frac{1}{\cos x}) \ dx$

$= \int (\tan x * \sec x) \ dx = \sec x + c$

4/ $y = \int \sec^2(2ax) \ dx$

$= \frac{1}{2a} * \tan(2ax) + c$

5/ $y = \int x \cdot \cot x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \cot x^2 \, dx$

$= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x^2}{\sin x^2} 2x \, dx = \frac{1}{2} \ln|\sin x^2| + c$

6/ $y = \int e^{\cos x} * \sin x \, dx$

$= \frac{-1}{-1} \int e^{\cos x} * \sin x \, dx$

$= - e^{\cos x} + c$

7/ $y = \int \frac{\sin t + \cos t}{\cos t} \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt + \int \frac{\cos t}{\cos t} \, dt$

$= - \int - \frac{\sin t}{\cos t} dt + \int (1) dt$

$= - \ln|\cos t| + t + c$

8/ $y = \int \cos^3 z \, dz = \int \cos^2 z \cos z \, dz$

$= \int \cos z \, (1 - \sin^2 z) \, dz$

$= \int (\cos z - \cos z \sin^2 z) \, dz$

$= \int \cos z \, dz - \int \cos z \sin^2 z \, dz$

$= \sin z - \frac{\sin^3 z}{3} + c$

الاعــداد المــركــبة

The Complex numbers

العــدد المركب : هو عدد يتكون من جزئين احدهما حقيقي والاخر خيالي (تخيلي) .

نرمز للعدد المركب : $z = a \pm ib$

حــيــث : $a , b \in R$

الجزء الحقيقي للعدد المركب : a

الجزء الخيالي للعدد الحقيقي : ib

**** ($i^2 = -1$) ****

العامل المنسب (العامل المرافق) :

العدد المركب : $z = a + ib$

العامل المنسب للعدد : $\bar{z} = a - ib$

****

العمليات الجبرية على الاعداد المركبة :

1/ تساوي الاعداد المركبة :

$z1=a + ib \ , \ z2 = c + id$

$z1 = z2 \therefore a=c , b=d$

2/ جمع و طرح الاعداد المركبة :

$Z1 - z2 = (a+ib) - (c + di)$

$= (a-b) + i (b-d)$

$z1 + z2 = (a+ib) + (c + di)$

$= (a+b) + i (b+d)$

3/ الضرب بعدد ثابت :

$Z = a + ib$,, العدد الثابت = k

$(k) (z = a + ib) = ka + kib$

4/ ضرب الاعداد المركبة :

$z1=a + ib , z2 = c + id$

$z1 * z2 = ac + iad + ibc + i^2 bd$

$z1 * z2 = (ac - bd) + i (ad + bc)$

5/ قسمة الاعداد المركبة :

$$Z1/z2 = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} * \frac{c-di}{c-di}$$

$$= \frac{ac-adi+bci-bd\,i^2}{c^2-d^2\,i^2}$$

$$= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^{2`}} + \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

<u>تـمـاريـن :</u>

1/ (3 + 2i) + (-7 - i)

= 3 – 7 + 2i – i

= - 4 + i

2/ (8 – 6i) – (2i – 7)

= 8 – 6i – 2i + 7

= 15 – 8i

3/ (2 – 3i) (4 + 2i)

= 2 (4 + 2i) – 3i (4 + 2i)

= 8 + 4i – 12i – 6 i^2

= 8 + 4i – 12i – 6 (-1)

= 8 + 4i – 12i + 6

= 14 – 8i

4/ $\frac{3-2i}{-1+i} = \frac{3-2i}{-1+i} * \frac{-1-i}{-1-i}$

$= \frac{3(-1-i) - 2i(-1-i)}{(-1)^2 - (-i)^2}$

$= \frac{-3-3i+2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{-3-3i+2i-2}{1-i^2}$

$= \frac{-5-i}{1+1} \gg\gg \frac{-5-1}{2} \gg\gg \frac{-5}{2} - \frac{1}{2}\, i$

5/ $\frac{5+5i}{3-4i}$

$= \frac{5+5i}{3-4i} * \frac{5+5i}{3-4i}$

$= \frac{5(3+4i) + 5i(3+4i)}{3^2-(4i)^2}$

$$= \frac{15+20i+15i+20i^2}{9-16\,i^2} \quad \gg\gg \quad \frac{15+20i+15i-20}{9-16(-1)}$$

$$= \frac{-5+35i}{25} \quad \gg\gg \quad \frac{-1}{5} + \frac{7}{5}\,i$$

المـــمـــحـــددات ((Determinants))

المـــحـــددات: هي مجموعة من عناصر مصفوفة معينة مرتبة على شكل صفوف واعمدة . بغض النظر عن عدد الصفوف والاعمدة تكون محصورة بين مستقيمين عموديين متوازين . يرمز للمحدد ((D)) وكل محدد يحمل رقم اسفل الرمز يدل على نوع المحدد D2 , D3 , ...

النـوع الاول المحدد الثنائي ((D2)) :

يسمى المحدد من الدرجة ((2X2)) $D2 = \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}$

وهي عملية حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وتطرح منها حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي .

مـــثال // جد المحدد الثنائي للمصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}_{(2X2)}$

الـــحـــل // $|A| = (6*8) - (3*-1) = [48 - (-1)] = \underline{51}$

الــنــوع الـثاني المـحدد الثلاثي ((D3))

1/- طريقة التعريف ((التعويض)) :

// وضع جدول الاشارات للمصفوفة المراد استخراج لها المحدد لمعرفة كل عنصر ما هو اشارته لاتمام الحل .

// يتم اختيار عناصر احد الصفوف او الاعمدة حسب سهولة الحل .

// بعد الاختيار يتم تثبيت الصف او العمود ومعرفة اشارة كل عنصر من جدول الاشارات .

// نضرب كل عنصر من الصف او العمود المثبت بعناصر المصفوفة المثبتة ((وهي مصفوفة مربعة))

مــثال : جــد المحــدد الثــلاثي للمــصفوفه (A)من درجة ((3X3)) :

$$A = \begin{matrix} 5 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 6 \\ 7 & -1 & 0 \end{matrix}$$

الحـل // تثبيت الصف الاول (4 - 3 5) >>>> جدول الاشارات (+ - +) :

جدول الاشارات

$$D3 = \begin{vmatrix} b1 & c1 & e1 \\ b2 & c2 & e2 \\ b3 & c3 & e3 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & + \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$D3 = (+5) * \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (3) * \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + (-4) * \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$$

| A | = 5*[(-2*0) – (6*-1)] -3*[(2*0) – (6*7)] - 4* [(2*-1) – (-2*7)]

= 5 * (0+6) – 3 * (0 – 42) – 4 * (-2 +14)

= 30 + 126 – 48 ….. | A| = <u>108</u>

2/ - طريقة الاسهم : وهي طريقة ايجاد المحدد الثلاثي ((D3)) . نكرر اول عمودين من المصفوفة دائما ونرسم الاسهم للمحدد ونبدا بعناصر القطر الرئيسي ثم الاسهم تتابعا بالترتيب وتكون ثلاثة اسهم موجبة وثلاثة اسهم سالبة .

$$D3 = \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 & a1 & b1 \\ a2 & b2 & c2 & a2 & b2 \\ a3 & b3 & c3 & a3 & b3 \end{vmatrix}$$

D3 = [(a1*b2*c3) + (b1*c2*a3) + (c1*b2*a3)] - [(b1*a2*c3) + (a1*c2*b3) + (c1*b2*c3)]

مـثال // المصفوفة ((B)) من درجة 3X3) جـد المحدد الثلاثي لها .

$$(B)^{1}_{2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

الحـل //

$$D3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

D3 = [(1*4*7)+(2*5*2)+(3*6*0)] – [(2*6*7) + (1*5*0) + (3*4*2)]

= (28 + 20) – (48 + 24) >>>>>>>> DB3 = - 24

طريقة حــل المعادلات الانية بالمحددات وهي احد تطبيقات المحدد الثلاثي :

****

((طــريقة كــرايــمر))

+ a1 x + b1 y + c1 z = k1

+ a2 x + a2 y + c2 z = k 2

+ a3 x + a3 y + c3 z = k 3

حيث ان : مــعــاملات المتغيرات في أي معاملات

$$D3 = \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix}$$

//استبدال عمود معاملات المتغير x بمعاملات الحد الاخر للمعادلة وهي K1 , K2 ,K3.

$$X = \frac{DX}{D3} \qquad ,,, DX = \begin{vmatrix} k1 & b1 & c1 \\ k2 & b2 & c2 \\ k3 & b3 & c3 \end{vmatrix}$$

// استبدال عمود معاملات المتغير y بمعاملات الحد الاخر للمعادلة وكذلك بالنسبة للمتغير z .

$$Y = \frac{DY}{D3} \qquad DY = \begin{vmatrix} a1 & k1 & c1 \\ a2 & k2 & c2 \\ a3 & k3 & c3 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{DZ}{D3} \qquad DZ = \begin{vmatrix} a1 & b1 & k1 \\ a2 & b2 & k2 \\ a3 & b3 & k3 \end{vmatrix}$$

ولايجاد قيم المتغيرات X , Y , Z

مثــال // جــد قيم X1 , X2 , X3 من المعادلات الاتية التالية مستخدما طريقة المحددات ((كــرايمر)) :

الــحــل :

X 1 – X 2 = 5

-X 2 + X 3 = 1

6 X 1 + 2 X 3 = 0

D3=[(1*-1*2)+(-1*1*6)+(0*0*0)] – [(1*0*2)+(1*1*0)+(0*-1*6)] >> = - 2 -6 >> <u>D3 = - 8</u>

K X2 X3 K X2 X1 K X3 X1 K X1 X2 K X1 X2

DX = $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ > DX2 = $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ > DX3 = $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ > $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$ > $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ > $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

DX1 = [(5*-1*2) + (-1*1*0) + (0*1*0)] – [(-1*1*2) + (5*1*0) + (0*-1*0)]

= (-10) – (-2) <<<<>>>> <u>DX1 = - 8</u>

DX2 = [(1*1*2) +(5*1*6) +(0*0*0)] – [(5*0*2) + (1*1*0) + (0*1*6)]

= (2 + 30) <<<<<<>>>>>> <u>DX2 32</u>

DX3 = [(1*-1*0) + (-1*1*6) + (5*0*0)] – [(-1*0*0) + (1*1*0) +(5*-1*6)]

= (-6) – (-30) >>>>>><<<<<< <u>DX3 = 24</u>