المحددات وخواصها Determinants &Properties

التعريف:-المحددات مجموعة عناصر تترتب بشكل صفوف وأعمدة محصورة بين مستقيمين شاقوليين،وتكون فيها عدد الصفوف مساو لعدد الأعمدة.و يسمى المحدد اعتمادا على عدد صفوفه أو أعمدته.

المحدد الثائي $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

المحدد الثلاثي $\begin{vmatrix} a & \mathrm{e} & \mathrm{h} \\ \mathrm{b} & \mathrm{f} & \mathrm{i} \\ \mathrm{c} & \mathrm{g} & \mathrm{j} \end{vmatrix}$

إيجاد قيمة المحدد

1- **المحدد الثنائي** $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

نضرب نهايات الأقطار ببعضها ويطرح حاصل الضرب،ويكون الفرق هو الناتج.

$$=a*d - b*c$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=3*2 - 2*1 = 4$$

2- **المحدد الثلاثي** $\begin{vmatrix} a & \mathrm{e} & \mathrm{h} \\ \mathrm{b} & \mathrm{f} & \mathrm{i} \\ \mathrm{c} & \mathrm{g} & \mathrm{j} \end{vmatrix}$

طريقة ضرب الأقطار:- تتلخص بإضافة صفين أو عمودين ثم ضرب الأقطار مع ملاحظة الإشارات .

إضافة عمودين(العمودالاول و الثاني فقط) $\begin{vmatrix} a & \mathrm{e} & \mathrm{h} \\ \mathrm{b} & \mathrm{f} & \mathrm{i} \\ \mathrm{c} & \mathrm{g} & \mathrm{j} \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{a} & \mathrm{e} \\ \mathrm{b} & \mathrm{f} \\ \mathrm{c} & \mathrm{g} \end{matrix}$

اضافة صفين(الصف الاول والثاني فقط) $\begin{vmatrix} a & \mathrm{e} & \mathrm{h} \\ \mathrm{b} & \mathrm{f} & \mathrm{i} \\ \mathrm{c} & \mathrm{g} & \mathrm{j} \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{e} & \mathrm{h} \\ \mathrm{b} & \mathrm{f} & \mathrm{i} \end{vmatrix}$

مثال(1) :- جد قيمة المحدد التالي بإضافة عمودين:-

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$=\{(2*2*1)+(1*0*0)+(3*1*0)\}-\{(0*2*3)+(0*0*2)+(1*1*1)\} =(4+0+0)-(0+0+1) =4-1=3$$

مثال(2) :- جد قيمة المحدد التالي بإضافة صفين:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

=(0*1*-5)+(-2*2*4)+(3*-1*3)-(-2*-1*-5)-(0*2*3)-(3*1*4)

= {0+(-16)+(-9)}-{(-10)-(0)-(12)}

= -27

<u>خواص المحددات:-</u>

الخاصية الاولى: قاعدة العامل المشترك

كل عامل مشترك بين عناصر أي صف أو عمود يمكن إخراجه خارج المحدد كعامل مشترك لذلك المحدد.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3*\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

وذلك بإخراج (3)كعامل مشترك للصف الثالث.

الخاصية الثانية:إذا جزئنا عناصر اي صف او عمود الى مجموع حدين فيمكن كتابة المحدد على شكل مجموع محددين.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3+2 & 3 \\ 1 & 0+2 & 0 \\ 0 & 1+2 & 1 \end{vmatrix} =$$

الخاصية الثالثة: إذا كانت جميع عناصر أي صف أو عمود أصفار فان قيمة المحدد تساوي صفرا.

لماذا $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

.

الخاصية الرابعة :قاعدة التبادل

إذا أبدل مواقع أي صفين أو عمودين متجاورين تتبدل فقط إشارة المحدد مع بقاء قيمته ثابتة.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

الخاصية الخامسة: قاعدة التماثل

إذا كانت عناصر أي صفين أو عمودين متساوية او مضاعفاتها فان قيمة المحدد تساوي صفر.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

لأن عناصر العمود الثالث ضعف عناصر العمود الأول.

حل المعادلات الآنية باستخدام المحددات(كرامر):-

قيمة كل مجهول هو خارج قسمة محددين احدهما بالبسط والآخر بالمقام.المحدد الذي يكتب بالمقام لجميع المجاهيل مكون من عوامل تلك المجاهيل بنفس الترتيب .أما المحدد الذي يكتب بالبسط فهو نفس محدد المقام بعد تبديل عوامل المجهول المراد إيجاد قيمته بنفس الترتيب.

مثال(1) :- حل المعادلة الآنية التالية بطريقة كرامر:

5x+y=2
x-y=4

الحل:

$$D=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -5-1=-6$$

$$D_{x}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix} = -2-4=-6$$

$$D_{y}=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 20-2=18$$

$$x=\frac{\mathrm{D_x}}{\mathrm{D}}=\frac{-6}{-6}=1 \quad , \quad y=\frac{\mathrm{D_y}}{\mathrm{D}}=\frac{18}{-6}=-3$$

مثال(2): جد قيمة x من المحدد التالي

$$\begin{vmatrix}x & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 2$$

الحل: 2x-2=2 →2x=2+2→ 2x=4 →x=2

مثال(3) :- حل المعادلة الآنية التالية بطريقة كرامر:

$$x+y+2z=6$$
$$2\,x+y+z=4$$
$$x+2y+3z=8$$

الحل:-

1- نستخرج محدد المقام

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = \left|\begin{matrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}$$ بإضافة عمودين

$$D=(3+1+8)-(6+2+2)=2$$

2- نحدد قيمة المجهول (x):-

$$D_x=\begin{vmatrix}6 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1\\ 8 & 2 & 3\end{vmatrix} = \left|\begin{matrix}6 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1\\ 8 & 2 & 3\end{matrix}\right|\begin{matrix}6 & 1\\ 4 & 1\\ 8 & 2\end{matrix}$$ باضافة عمودين

$$D_x=(18+8+16)-(12+12+16)=2$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{2}{2}=1$$

3- نحدد قيمة المجهول (y):

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{matrix}$$ باضافة عمودين

$$D_y = (12 + 6 + 32) - (36 + 8 + 8) = -2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{2} = -1$$

4- نحدد قيمة المجهول (z):

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$ باضافة عمودين

$$D_z = (8 + 4 + 24) - (16 + 8 + 6) = 6$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{6}{2} = 3$$

تمارين:

<u>سؤال(1) :-</u> جد قيمة xمن ا لمحدد التالي:-

$$\begin{vmatrix} 2 & x \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

<u>سؤال(2) :-</u> جد قيمة المحدد التالي بإضافة صفين:-

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

<u>سؤال(3) :</u>جد حل المعادلات التالية بطريقة كرامر:

x+2y+3z=5
2x+y+z=7
2x+2y+2z=0

<u>التفاضل Differentiation</u>

المشتقة:هي معدل تغير المتغير المعتمد إلى معدل تغير المتغير المستقل.أو هو ميل المستقيم المماس لاي منحني عند نقطة التماس. ويرمزلها بالرمز $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$ $D_x(y)$, y', $f'(x)$ وتسمى مشتقة y بالنسبة الى x.

<u>قواعد الاشتقاق:-</u>

أولا: <u>الدوال الجبرية</u>:-

1- مشتقة العدد الثابت= صفر.

مثال: جد$\frac{dy}{dx}$ للدالة

1) y = 7 --------- $\frac{dy}{dx} = 0$

2) y = -12 --------- $\frac{dy}{dx} = 0$

2- مشتقة المقدار الجبري المتكون من ثابت(c) مضروب بـ (x)مرفوع للقوة(n)

جد : مثال $(\frac{dy}{dx})$ للدالة

1) $y= 7x^3 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 21x^2$

2) $y= -12x^{-3} \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 36x^{-4}$

3- مشتقة دالة متعددة الحدود تساوي مشتقة كل حد على حدة.

مثال : جد$(\frac{dy}{dx})$ للدالة

$y = 2x^3 + 5x^2 - x^{-1}$

$\rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 10x + x^{-2}$

2) $y = \frac{5}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{x^2} - 3x^3 \quad \rightarrow y = 5x^{-\frac{1}{4}} + 3x^{-2} - 3x^3$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{4}x^{-\frac{5}{4}} - 6x^{-3} - 9x^2$

4- مشتقة دالة مرفوعة للأس (n) تساوي أللأس مضروب في الدالة مرفوعة للأس(n-1) ومضروبة في مشتقة نفس الدالة.

جد : مثال $(\frac{dy}{dx})$ للدالة

1) $y = (2x^3 + 5x^2 - x^{-1})^3$

$\frac{dy}{dx} = 3(2x^3 + 5x^2 - x^{-1})^2(6x^2 + 10x + x^{-2})$

2) $y = \left(\frac{5}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{x^2} - 3x^3\right)^{-5}$

$\frac{dy}{dx} = -5\left(\frac{5}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{x^2} - 3x^3\right)^{-6}\left(-\frac{5}{4}x^{-\frac{5}{4}} - 6x^{-3} - 9x^2\right)$

5- مشتقة حاصل ضرب دالتين تساوي الدالة الأولى مضروبة في مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية مضروبة في مشتقة)

مثال :جد$(\frac{dy}{dx})$للدالة

1) $y = (3x^3 - x^5 + 2x^4 + 5).(x^2 + x^3)$

$\frac{dy}{dx} = (3x^3 - x^5 + 2x^4 + 5).(2x + 3x^2) + .(x^2 + x^3)(9x^2 - 5x^4 + 8x^3)$

2) $y = (4x^3 - 2x^5)^2.(3x^2 + 4x^{-3})$

$\frac{dy}{dx} = (4x^3 - 2x^5)^2.(6x - 12x^{-4}) + (3x^2 + 4x^{-3}).[2(4x^3 - 2x^5).(12x^2 - 10x^4)]$

6- مشتقة حاصل قسمة دالتين تساوي المقام مضروبا في مشتقة البسط مطروحا منه البسط مضروبا في مشتقة المقام والكل مقسوما على مربع المقام.

مثال :جد$(\frac{dy}{dx})$ للدالة

$$1)y = \frac{(3x^3 - x^5 + 2x^4 + 5)}{(x^2 + x^3)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + x^3).(9x^2 - 5x^4 + 8x^3) - (3x^3 - x^5 + 2x^4 + 5).(2x + 3x^2)}{(x^2 + x^3)^2}$$

$$2)y = \frac{(4x^3 - 2x^5)^2}{(3x^2 + 4x^{-3})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2 + 4x^{-3}).[2(4x^3 - 2x^5).(12x^2 - 10x^4)] - (4x^3 - 2x^5)^2.(6x - 12x^{-4})}{(3x^2 + 4x^{-3})^2}$$

ثانيا: الدوال الضمنية:- الدالة الضمنية هي الدالة التي يمكن وضع أحد المتغيرات مثل (y) بدلالة متغير آخر مثل (x). أو هي الدالة التي يكون فيها المتغير المستقل غير منفصل عن المتغير المعتمد. وتوجد أمثلة كثيرة على هذه الدوال في التطبيقات العملية من أمثلتها معادلة الدائرة.

مثال :جد$(\frac{dy}{dx})$ للدالة

$$1)\quad 5x^4 - x^2y^3 - 7y^3 = 8$$

$$20x^3 - (x^2.3y^2y'.+y^3.2x) - 21y^2.y' = 0$$

$$-(3x^2.y^2 + 21y^2)y' = 2x.y^3 - 20x^3$$

$$y' = -\frac{2x.y^3 - 20x^3}{3x^2.y^2 + 21y^2}$$

$$3x^3y^3 - 5y^2 = 2x^4 2)$$

$$3[x^3.3y^2.y' + y^3.3x^2] - 10y.y' = 8x^3$$

$$[9x^3.3y^2 - 10y]y' = 8x^3 - 9y^3.x^2$$

$$y' = \frac{8x^3 - 9y^3.x^2}{9x^3.3y^2 - 10y}$$

ثالثا:- **مشتقة الدالة الأسية**:-الدالة الاسية هي دالة عكسية للدالة اللوغارتمية

$$if\ y = e^u \ldots\ldots\ldots\ldots, u = f(x)\ then\ \frac{dy}{dx} = e^u.\frac{du}{dx}$$

المشتقة = الدالة الاسية نفسها في مشتقة الاس

مثال :جد$(\frac{dy}{dx})$ للدالة

$$1)\quad y = e^{x^2}$$

$$y' = e^{x^2}.(2x)$$

$$y' = 2x.e^{x^2}$$

$$2)\quad y = e^{(2x-6)^3}$$

$$y' = e^{(2x-6)^3}.3(2x-6)^2(2)$$

$$y' = 6(2x-6)^2e^{(2x-6)^3}$$

رابعا: **مشتقة الدالة اللوغارتمية**:-

$$if\ y=\ln u \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ ,u=f(x)\ \ then\ \ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$$

المشتقة $=\frac{1}{\text{الدالة}}$. مشتقة الدالة

ملاحظة:1: lnx=y → x=e^{y}

ملاحظة 2: y=$e^{\ln x}$ → y=x

او y=$\ln e^{x}$ y=x

مثال :جد($\frac{dy}{dx}$)للدالة

1) $y=\ln(3x-4)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x-4}.(3)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{3x-4}$$

2) $y=\ln\left(2x^{3}+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}\right)^{5}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(2x^{3}+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}\right)^{5}}.5\left(2x^{3}+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}\right)^{4}.\left(6x^{2}-10x^{-3}-4x^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5\left(2x^{3}+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}\right)^{4}.\left(6x^{2}-10x^{-3}-4x^{-\frac{1}{3}}\right)}{\left(2x^{3}+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}\right)^{5}}\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{5\left(6x^{2}-10x^{-3}-4x^{-\frac{1}{3}}\right)}{2x^{3}+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}}$$

خامسا: **مشتقة الدوال المثلثية:-**

1) $if\ y=\sin u\ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \frac{dy}{dx}=\cos u.\frac{du}{dx}$

2) $if\ y=\cos u\ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \frac{dy}{dx}=-\sin u.\frac{du}{dx}$

3) $if\ y=\tan u\ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \frac{dy}{dx}=\sec^{2}u.\frac{du}{dx}$

4) $if\ y=\cot u\ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \frac{dy}{dx}=-csc^{2}u.\frac{du}{dx}$

5) $if\ y=\sec u\ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \frac{dy}{dx}=\sec u.\tan u.\frac{du}{dx}$

6) $if\ y=\csc u\ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \frac{dy}{dx}=-\csc u.\cot u.\frac{du}{dx}$

للدالة مثال :جد($\frac{dy}{dx}$)

1) $y=\sin x^{2}$

$$\frac{dy}{dx}=\cos x^{2}.(2x)=2x.\cos x^{2}$$

2) $y = \sin 2x \ . \cos x^3$

$\frac{dy}{dx} = \sin 2x \ . (-\sin x^3 \ . 3x^2) + \cos x^3 \ . (2 \cos 2x) = -3x^2 . \sin 2x \ . \sin x^3 + 2 \cos 2x \cos x^3$

$\frac{dy}{dx} = -3x^2 . \sin 2x \ . \sin x^3 + 2 \cos 2x \cos x^3$

3) $y = e^{\tan x}$

$\frac{dy}{dx} = e^{\tan x} . \sec^2 x$

سادسا: **قاعدة السلسلة**:- أ) إذا كانت (y) دالة إلى (t)وكانت (t) دالة إلى (x) أي

$$if\ y = f(t)\ , \dots .\ t = f(x) \to\to\to\to then\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} . \frac{dt}{dx}$$

(المعاملات مختلفةنضرب المشتقات) y——— t ——— x

1) $y = 3t^2 - 2 \quad , \ t = 5x$

$\frac{dy}{dt} = 6t \quad , \frac{dt}{dx} = 5$

$\frac{dy}{dx} = 30t \ \to \quad \frac{dy}{dx} = 30(5x) = 150x$

ب):- إذا كانت (y) دالة إلى (t)وكانت (x) دالة إلى (t) أي

$$if\ y = f(t)\ , \dots .\ x = f(t) \to\to\to\to then\ \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

(المعاملات متشابهة نقسم المشتقات) y—— t , x —— t

مثال :جد$(\frac{dy}{dx})$للدالة

$y = t^2 + 4$

$x = 5t - 2 \ \to x + 2 = 5t \to t = \frac{x+2}{5}$

$\frac{dy}{dt} = 2t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 5$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{5}$ نعوض عنt

$\frac{dy}{dx} = \frac{2(\frac{x+2}{5})}{5} = \frac{2x+4}{25}$

النهايات العظمى والصغرى/خطوات تعيين نقاط النهايات

الطريقة الاولى:

1)نجد المشتقة الاولى للدالة

2)نجعل المشتقة = صفر.ثم نجدقيم x (النقاط الحرجة)

3)ناخذقيمة اقل من xونعوضها في المشتقة الاولى ونجد قيمتها .ثم ناخذ قيمة اكبر من xونعوضها ايضا في المشتقة الاولى ونجد قيمتها.فاذا كانت قيمة المشتقة في الحالة الاولى موجبة وفي الحالة الثانية سالبة فان النقطة نقطة نهاية عظمى.وبالعكس اذا كانت قيمة المشتقة سالبة في الحالة الاولى وموجبة في الحالة الثانية فان النقطة نقطة نهاية صغرى.

الطريقة الثانية:

نتبع نفس خطوات الطريقة الاولى (1و2)ثم نجد المشتقة الثانية ونعوض قيم xفي المشتقة الثانية فاذا كانت قيمة المشتقة موجبة فان النقطة نقطة نهاية صغرى.وبالعكس اذا كانت قيمة المشتقة سالبة فان النقطة نقطة نهاية عظمى.

ملاحظة :لتكن y=f(x) دالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة(a,b) لذا فان مشتقتها الثانية يرمز لهابالرمز ´´ y . هناك رموز اخرى للتعبير عن المشتقة الثانية مثل $\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$, $D´_x(y)$, f´´(x),$\frac{d^2y}{dx^2}$

مثال:جد النهايات العظمى والصغرى للدالة $y=x^3-3x+2$

الحل: $y^{-}=3x^2-3$

$\rightarrow y^{-}=0 \rightarrow 3x^2-3=0 \rightarrow 3(x^2-1)=0$

اماx^2 -1=0→ x^2=1 x=±1

$\bar{\bar{y}}$ =6x-3

المشتقة الثانية عند النقطة x=1

$\bar{\bar{y}}$ =6(1)-3=3 ← النقطة نهاية صغرى

المشتقة الثانية عند النقطة x=-1

$\bar{\bar{y}}$ =6(-1)-3=-9 ← النقطة نهاية عظمى

مثال:جد النهايات العظمى والصغرى للدالة $y=\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+3$

الحل:

$$\bar{y}=x^2-3x \rightarrow \bar{y}=0 \rightarrow x^2-3x=0 \rightarrow x(x-3)=0 \rightarrow x=0,3$$

المشتقة الثانية عند النقطةx=0

$\bar{\bar{y}}$=2x-3→2(0)-3=-3 → x=0 نقطة نهاية عظمى

المشتقة الثانية عند النقطةx=3

$\bar{\bar{y}}$ =2x-3→2(3)-3=3 →

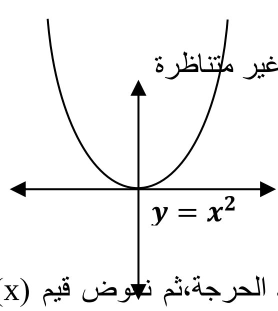
x=3 نقطة نهاية صغرى

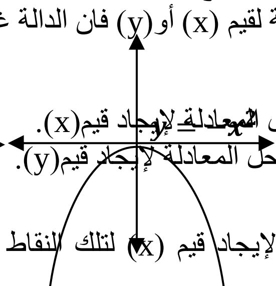
رسم الدوال:

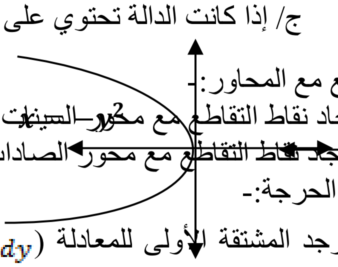
1- التناظر:- أ/ إذا كانت جميع أسس (y) زوجية فان الدالة متناظرة مع محور السينات.

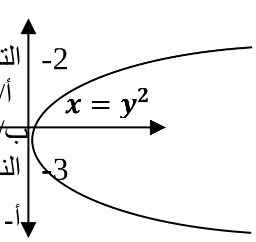
ب/ إذا كانت جميع أسس (x) زوجية فان الدالة متناظرة مع محور الصادات.

ج/ إذا كانت الدالة تحتوي على أسس زوجية وفردية لقيم (x) أو(y) فان الدالة غير متناظرة









2- التقاطع مع المحاور:-

أ/لإيجاد نقاط التقاطع مع محور السينات نفرض(y=0) ونحل المعادلة لإيجاد قيم(x).

ب/ لإيجاد نقاط التقاطع مع محور الصادات نفرض(x=0) ونحل المعادلة لإيجاد قيم(y).

3- النقاط الحرجة:-

أ- نوجد المشتقة الأولى للمعادلة ($\frac{dy}{dx}$)ونساويها بالصفر لإيجاد قيم (x) لتلك النقاط الحرجة،ثم نعوض قيم (x) بالمعادلة الأصلية لإيجاد قيم(y) لتلك نقطة حرجة حصلنا عليها.

ب- نوجد المشتقة الثانية لتلك المعادلة ($\frac{d^2y}{dx^2}$) ونعوض قيم (x) فيها للنقاط الحرجة فان كانت($\frac{dy}{dx}$):-

1- أكبر من الصفر فان تلك النقطة الحرجة هي نهاية صغرى.

2- أصغر من الصفر فان تلك النقطة الحرجة هي نهاية عظمى.

3- مساوية للصفر فان تلك النقطة الحرجة هي نقطة انقلاب.

مثال(1):- ارسم منحني الدالة التالية $y=x^2+2x+1$

الحل:-

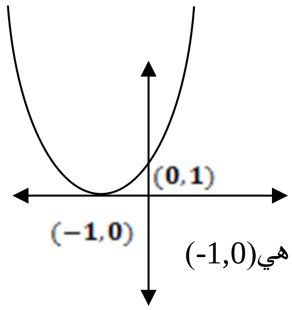
1- لا يوجد تناظر للدالة .... لماذا

2- نوجد نقاط التقاطع مع محور الصادات .... x = 0

y = 0 + 0 + 1 = 1

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي(0,1)

3- نوجد نقاط التقاطع مع محور السينات .... y = 0



$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

(x+1)(x+1)= 0

$(x+1)^2 = 0$ .... $x = -1$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي(-1,0)

4- نوجد النقاط الحرجة

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$$

$$2(x+1) = 0$$

$$x = -1 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 0$$

إذن النقطة (-1,0) هي النقطة الحرجة الوحيدة في الدالة

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0$$

إذن النقطة الحرجة (-1,0) هي نهاية صغرى .... لماذا

مثال(2):- ارسم منحني الدالة التالية $y = x^3 - 3x^2$

الحل:-

1- الدالة غير متناظرة.

2-نوجد نقاط التقاطع مع المحورين.

$$at\ x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$$

$$at\ y = 0 \rightarrow y = x^2(x-3) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3,0)$$

3- نوجد النقاط الحرجة

$$y^{-} = 3x^2 - 6x$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$3x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 8 - 12 = -4 \rightarrow (2,-4)$$

4-نختبر النقاط الحرجة

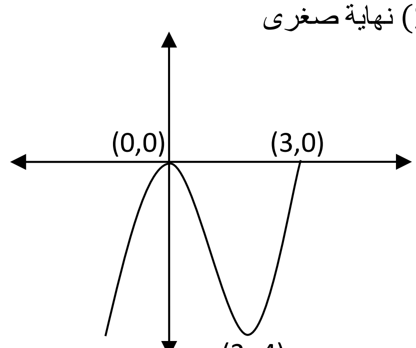
$$y^{=} = 6x - 6$$

$$at\ (0,0) \rightarrow y^{=} = 6(0) - 6 = -6 \rightarrow \therefore y < 0$$

النقط (0,0) نهاية عظمى

$$\therefore\ at\ (2,-4) \rightarrow y^{=} = 6(2) - 6 = 6 \rightarrow \therefore y > 0$$

النقطة $(2,-4)$ نهاية صغرى ∴



ارسم الدوال التالية :-

$$1) y = x^3 - 3x$$
$$2) y = x^4 - 4x^2$$

تطبيقات المشتقة:

1) ايجاد ميل المنحني وميل المستقيم المماس للمنحني

ميل المنحني يساوي المشتقة الاولى ويساوي ميل المستقيم المماس للمنحني عند نقطة التماس ويرمز له بالرمز m

مثال: جد ميل المنحني $y=x^2+2x+1$ عند النقطة (1,0)

الحل: $\frac{dy}{dx} = m = 2x + 2$ (الميل =المشتقة)

نعوض بالنقطة (1,0)

ينتج $\frac{dy}{dx} = 2(1) + 2$

$\frac{dy}{dx} = 4 = m =$ الميل

مثال: : جد ميل المستقيم المماس للمنحني $y=x^3+2x^2+1$ عند النقطة (1,1)

$\frac{dy}{dx} = m = 3x^2 + 4x$

$$\frac{dy}{dx} = 3(1)^2 + 4(1) = 7 = m$$

2) ايجاد معادلة المستقيم المماس والعمودي عليه

ملاحظة:1) ميل المستقيم العمودي على المماس = المقلوب السالب لميل المماس مثلا اداكان ميل المماس = 7 فان ميل العمودي عليه =$\frac{-1}{7}$

ملاحظة 2) معادلة المستقيم المماس هي

$y-y_1=m(x-x_1)$ حيث(x_1, y_1)نقطة التماس وهي نفس المعادلةلايجاد معادلة العمود على المستقيم المماس مع اختلاف الميل

مثال:جد معادلة المستقيم المماس ومعادلة المستقيم العمودي عليه للمنحني

$y=x^3-5x^2+4x$ *في النقطة* (2,0)

الحل: $m=\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 10x + 4$

$=3(2)^2 - 10(2) + 4 = -4$

معادلة المستقيم المماس $y-0=-4(x-2) \rightarrow y+4x-8=0$

ميل العمود يساوي$\frac{1}{4}$

معادلة المستقيم العمود تساوي $y-0=\frac{1}{4}(x-2) \rightarrow y-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=0$

3)حساب السرعة والتعجيل

اذاكانت *s*هي المسافة التي يقطعها جسم في زمن *t* حيث *s=f(t)* فان مشتقة المسافة بالنسبة للزمن تساوي السرعة ويرمز لها بالرمز $s' = \frac{ds}{dt} = v$.اما مشتقة السرعة بالنسبة للزمن فتساوي التعجيل ويرمز لها بالرمز $a = v' = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = s''$.

مثال: جسم يتحرك وفق معادلة $s = t^3 + 5t$ حيث t بالثانية و s المسافة بالأمتار جد سرعة الجسم و تعجيله بعد 2 ثانية

$\rightarrow s = t^3 + 5t \quad \rightarrow$ السرعة $= \bar{s} = 3t^2 + 5$

بعد2 ثانية $\rightarrow \quad \bar{s} = 3(2)^2 + 5 = 17m/sec$

التعجيل $= \bar{\bar{s}} = 6t$

$\rightarrow$ بعد2 ثانية $\bar{\bar{s}} = 6(2) = 12m/sec^2$

تطبيقات هندسية على النهايات العظمى والصغرى:

مثال1)ماالعددان الموجبان اللذان مجموعهما 20ومجموع مربعيهما اصغر مايمكن؟

الحل: نفرض العدد الاول =x

نفرض العدد الثاني = 20-x

نفرض مجموع مربعيهما =y

$y=x^2+(20-x)^2 \quad \rightarrow \quad y' = 2x+2(20-x)(-1)$

$y'=2x-40+2x \quad \rightarrow \quad y'=4x-40 \quad \rightarrow \quad 4x-40=0$

$4x=40 \quad \rightarrow \quad x=10$

$y''=4$ نهاية صغرى

العدد الاول $x=10$ والعدد الثاني $20-10=10$

مثال 2) قطعة ارض مستطيلة الشكل يحدها نهر من احدى جهاتها .جد اكبر مساحة من الارض يمكن احاطتها بسياج طوله 120 m.

نهر ~~~~~~~

الحل:نفرض طول الارض =x نفرض عرض الارض y=120-2x

نفرض مساحة الارض =A $A=x.y$ ———— (1)

$A=x(120-2x) =120x-2x^2 \rightarrow A'=120-4x \rightarrow 120-4x =0$

$120=4x \quad \rightarrow \quad x=30$

نجد $A''= -4$

نهاية عظمى

اذن الطول =30 والعرض $120-2(30)=60$ واكبر مساحة $A=(30)(60) =1800m^2$