مادة الرياضيات
المرحلة الاولى

الكلية التقنية الجنوبية

المحاضرة الاولى

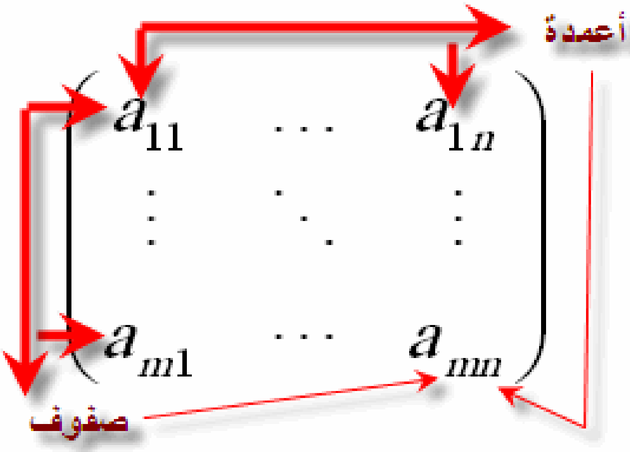
المصفوفات والمحددات

اعداد

م.م ميادة مارد عبد الحسين

المصفوفات (Matrices)

المصفوفة: هي مجموعة مرتبة من الأعداد الحقيقية او المعقدة أوكلاهما معاً منتظمة بشكل صفوف واعمدة, والمصفوفة التي تملك m من الصفوف و n من الاعمدة تدعى مصفوفة من الدرجة $m \times n$ وتكتب بالشكل:



تستخدم المصفوفة كثيرا في حل المعادلات الخطية وفي علم الاقتصاد وغيرها،

رتبة المصفوفة: هي عبارة عن ضرب عدد الصفوف في عدد الأعمدة $(m*n)$

امثلة:

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}_{(2*3)}$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}_{(1*3)}$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{vmatrix}_{(3*1)}$

- **انواع المصفوفات:**

١- **المصفوفة الصفية :** هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط.

مثلاً $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

٢- **المصفوفة العمودية :**هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط. مثلاً $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

٣- **المصفوفة المربعة :** هي مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد اعمدتها.مثلاً

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

٤- **المصفوفة الصفرية :** هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار.مثلاً

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٥- **المصفوفة القطرية:** هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي. مثلاً

القطر الرئيسي

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

٦- **مصفوفة الوحدة :** هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي يساوى واحد. ويرمز لهل بالرمز $I_n = I_{n\times n}$ مثلاً

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تساوى مصفوفتين:

نقول عن المصفوفة A تساوي المصفوفة B إذا تحقق الشرطين:

١- إذا كانتا من نفس الرتبة.

٢- عناصرهما المتناظرة متساوية. مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

• العمليات الحسابية على المصفوفات :

جمع و طرح المصفوفات :

لجمع أو طرح مصفوفتين لهما الرتبة نفسها فإننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة للمصفوفتين.

مثلاً

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{bmatrix}$$

مثال: اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

اوجد كلاً مما يأتي اذا امكن:

$$a)\ \ A + B \qquad b)\ A - B \qquad c)\ B + C$$

الحل:

$$\text{a) } A + B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + 0 & 5 + (-2) \\ -2 + 5 & 1 + 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A - B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 0 & 5 - (-2) \\ -2 - 5 & 1 - 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } B + C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لا يمكن اجراء عملية الجمع لان المصفوفتين ليس لهما نفس الرتبة

- **ضرب المصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :**

عند ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه فإننا نضرب العدد في جميع عناصر المصفوفة أو نقسم العدد على جميع عناصر المصفوفة. مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow k\,A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{A}{k} = \begin{bmatrix} \frac{a}{k} & \frac{b}{k} \\ \frac{c}{k} & \frac{d}{k} \end{bmatrix}$$

مثال / اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ اوجد كلاً مما يأتي

$a)\ 2A$ $\quad b)\ 2A + B$ $\quad c)\ \frac{B}{2}$

الحل:

$$a)\ 2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 8 \\ 2\times 1 & 2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b)\ 2A + B = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$c)\ \frac{B}{2}=\frac{\begin{bmatrix}6 & -4\\ 2 & 8\end{bmatrix}}{2}=\begin{bmatrix}\frac{6}{2} & \frac{-4}{2}\\ \frac{2}{2} & \frac{8}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

- ## ضرب المصفوفات

ضرب صف في عمود:

حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود وهذا الضرب ليس تبديليا.

$$[a \quad b]\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}=[a\times c+b\times d]$$

فمثلاً

$$[2 \quad 4]\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=[2\times 1+4\times 3]=[2+12]=[14]$$

$$[1 \quad 4 \quad 6]\begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix}$$

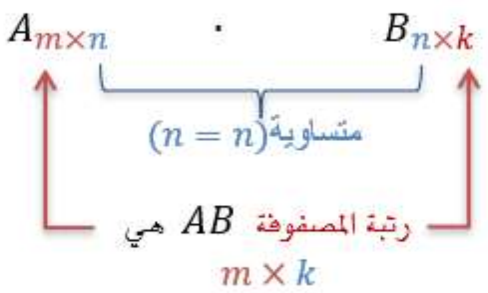
لا يمكن حسابها لان عدد عناصر الصف لا تساوي عدد عناصر العمود

- ## ضرب مصفوفتين:

حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في مصفوفة من الرتبة $n \times k$ (أي ان عدد أعمدة المصفوفة الأولى تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هي مصفوفة من الرتبة $m \times k$ وكل عنصر من عناصر ها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

فمثلا:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$



مثال: اوجد حاصل الضرب للمصفوفتين $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2 \quad 3] \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [2 \quad 3] \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ [1 \quad 4] \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [1 \quad 4] \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 7 & 2 \times 6 + 3 \times 8 \\ 1 \times 5 + 4 \times 7 & 1 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+21 & 12+24 \\ 5+28 & 6+32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$$

- **المحددات:**

إذا كانت A مصفوفة مربعه فإن محدد المصفوفة A هو عبارة عن عدد حقيقي ونرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$

حساب المحددات 2× 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال: اوجد قيمة محدد المصفوفات التالية اذا امكن:

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad b)\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$a)\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times -4) = 6 - (-4) = 6 + 4 =$$

$$= 10$$

$$b)\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

لا يمكن حساب المحددة لأن المصفوفة ليست مربعة

• حساب المحددات 3×3

المحدد 3×3 للمصفوفة المربعة A هي عبارة عن مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الموازية للقطر الرئيسي(من اعلى الى اسفل)ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية (من اسفل الى اعلى)وتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على اليمين.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

$$= (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

مثال: اوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

الحل:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 6 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right.$$

$$= ((4\times2\times1) + (-1\times6\times(-2)) + (3\times(-3)\times5)) - ((3\times2\times(-2)) + (4\times6\times5) + (-1\times(-3)\times1))$$

$$= (8 + 12 + (-45)) - ((-12) + 120 + 3) = -25 - 111 =$$

$$= -136$$

الواجب البيتي

1. اذا كانت $B = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ اوجد $\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{-2}}$

2. اذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

اوجد $3A - 2B$

3. اذا كانت $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

اوجد $a)\ A.B \quad , \quad b)\ B.A$